CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

6º E 7º ANOS

PROFESSOR

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Finais	Izabelle de Vasconcelos Costa (Orientadora) Tábita Viana Cavalcante (Gerente) Ednalva Menezes da Rocha Galça Freire Costa de Vasconcelos Carneiro Rafaella Fernandes de Araújo
Leitura Crítica	Tabita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Antônia Varele da Silva Gama
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabricio Siqueira Benevides Fernando Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

Sumário

1 Apresentação do Material

Caro(a) professor(a), iniciamos, com este caderno, nossa colaboração com você e com sua escola para, juntos, recuperarmos e fortalecermos o aprendizado de Matemática de nossas crianças e jovens no ensino básico em nosso estado e municípios! A avaliação de impacto da pandemia, realizada no fim do primeiro semestre deste ano, gerou evidências sobre quais conhecimentos e habilidades matemáticas estão mais fragilizadas entre alunos do quinto ano e do nono ano. Uma análise minuciosa dos dados, tanto estatística quanto pedagógica, revela que a Aritmética dos Números Racionais, em suas representações fracionária e decimal, está na base de tópicos e técnicas que devemos consolidar inicialmente ao longo de todos os anos finais do Ensino Fundamental. Ou seja, fortalecendo e construindo *novos significados e abordagens* para a Aritmética, teremos fundações firmes para a ampliação do repertório matemático e o desenvolvimento cognitivo de nossos alunos.

Utilizando este caderno, você pode planejar e executar vários percursos curriculares: o tempo e a profundidade com os quais você trabalhará cada tema devem ser ajustados a cada aula. Sugerimos que seu planejamento leve em conta o desempenho dos alunos nos exercícios sugeridos ao fim de cada seção. Ao longo do texto, indicamos *sequências de tarefas* que podem ser usadas em *avaliações formativas*: nessas avaliações, é importante que você não apenas corrija tarefas em termos de "certo" ou "errado", mas reconheça as razões dos eventuais erros e identifique os pontos em que o aluno tem avanços e outros em que ele(a) ainda necessita de reforços. Em resumo, torna-se fundamental dar ao aluno não apenas uma nota, mas uma *devolutiva* completa, acompanhada, se possível, de um roteiro de estudos específico, tendo em conta os tópicos em que ele(a) mostre estar com dificuldades.

Resumamos, agora, os conteúdos e habilidades trabalhadas neste caderno. O primeiro capítulo, 2, (re)apresenta interpretações aritméticas e geométricas do **conceito de fração**, enfatizando a noção de **equivalência de frações**, central para a definição, ao mesmo tempo formal e intuitiva, de **número racional**. A ideia é usar a representação geométrica de números racionais, aqui ainda expressos por frações, como pontos na reta numérica: fixada uma unidade de medida, como fizemos ao introduzir os números naturais, trata-se de representar $\frac{1}{n}$, $n \neq 0$, como o ponto cuja distância à origem é n **vezes menor** do que a unidade de medida dada. Desse modo, a equivalência entre frações pode ser entendida como uma igualdade de comprimentos ou medidas, em geral, expressas em diferentes **escalas**. Esse é o mote com o qual introduzimos toda a discussão sobre equivalência e comparação de frações. Usamos representações pictóricas convencionais de frações, como "pizzas" e barras, mas sempre as reinterpretando com o uso da reta numérica. As chamadas *regras práticas* para verificar a equivalência ou comparação de frações derivam da definição, simples e natural, de que a equivalência (respectivamente, comparação) permanece válida ao multiplicarmos as frações em uma relação de igualdade (respectivamente, desigualdade) por um *múltiplo comum*. Essa mera observação é o fundamento das "regras" e "truques" que, muitas vezes, são apresentados como arbitrários a nossas crianças. Essa forma de abordar esse tema sedimenta a noção de **proporcionalidade**, que será construída ao longo de toda esta etapa do Ensino Fundamental e cujos alicerces já vêm sendo postos desde os anos iniciais. O capítulo seguinte, 3, parte dessa preparação cuidadosa para apresentar as operações aritméticas entre números racionais na forma de frações: o objetivo primordial é *compreender* e *utilizar* corretamente os **algoritmos das operações aritméticas**, o segundo tema principal deste caderno. Apresentamos, detalhadamente, alguns procedimentos para a **adição**, **subtração**, **multiplicação** e **divisão** de números racionais na forma de frações. Algoritmos que, muitas vezes, usamos de modo irrefletido, como se fossem regras arbitrárias, são explicados e tornados *naturais* e, portanto, mais aceitáveis: a compreensão profunda desses procedimentos é necessária para que o aluno desenvolva as habilidades aritméticas definidas no DCRC. Procedimentos como "para dividir uma fração pela outra, multiplicamos a 'primeira' delas pela inversa da 'segunda' ", por exemplo, são justificados em termos da relação de equivalência, extensamente trabalhada no Capítulo 2, com o suporte das diversas representações geométricas das frações. Um objetivo de aprendizagem, premissa deste caderno, é o desenvolvimento do senso numérico no aluno, em particular da compreensão de que são as propriedades das operações aritméticas que dão validade a diferentes algoritmos, não apenas aos mais conhecidos, mas a outros modos de efetuar os cálculos que o próprio aluno possa desenvolver. É preciso ter à mão diversos algoritmos para contextos e problemas diferentes, parte da ideia da **flexibilidade numérica**.

Os exercícios ao fim de cada seção são agrupados em sequências, ordenadas, cada uma delas, em um crescendo de complexidade e/ou dificuldade técnica. Alunos com lacunas em conhecimentos mais básicos devem ser expostos, inicialmente, às primeiras sequências. Agora, alunos que estejam mais desenvoltos quanto aos fatos e técnicas mais elementares devem ser motivados a fazer as tarefas nas sequências finais. Importante destacar que alguns dos exercícios foram escolhidos para apresentar (ou ilustrar) um certo conceito ou técnica. Recomendamos que você possa apresentar e discutir detalhadamente esses exercícios com os alunos.

Apresentamos, a seguir, um roteiro possível para uso deste caderno ao longo de quatro semanas. A tabela relaciona os objetos de conhecimentos (e suas especificações), as habilidades da BNCC e DCRC, os saberes e habilidades da **Matriz dos Saberes** e, por fim, quais descritores na Matriz de Referência do SAEB estão sendo trabalhados ou que dependem dos assuntos estudados neste material. Segue, então, uma proposta de **rotina pedagógica semanal**.

1.1 – Rotinas pedagógicas e de uso do material

Os temas a serem trabalhados são os conceitos introdutórios da representação dos números racionais em termos de frações, especialmente a **equivalência de frações** e **comparação de frações**, nas seções 2.1 e 2.2, respectivamente. Além disso, abordaremos, no capítulo 3, os conceitos, representações, procedimentos e alguns usos das **operações aritméticas** entre frações, explicitando as justificativas e intuições relativas aos **algoritmos da adição, da multiplicação** e da **divisão**, considerando que este último é uma fonte de incompreensão e de lacunas conceituais relevantes. Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC correspondentes a essas seções, do segundo ao sétimo ano, são EF02MA08, EF03MA08, EF03MA09 e EF03MA17, EF04MA06, EF04MA09 e EF04MA16, EF05MA03 a EF05MA05, EF05MA07, EF05MA08 EF05MA10, EF06MA07 a EF06MA11 e, finalmente, EF07MA08 e EF05MA12. Quanto a Matriz dos Saberes, os saberes e habilidades que serão mobilizados com as atividades nessas seções são:

- Saber S03: efetuar operações e resolver problemas, envolvendo números racionais e suas representações fracionárias e decimais
  - S03.H1: relacionar divisão de números naturais a frações (eventualmente “mistas” ou “impróprias”)
  - S03.H2: reconhecer (e expressar-se usando) frações, em diferentes representações e significados, relacionados a diversos contextos cotidianos, socioeconômicos e científicos-tecnológicos
  - S03.H3: determinar frações de um número inteiro (e.g., metade, um terço, um quinto, um décimo, um centésimo de uma dada quantidade), associando-as às noções de divisão, fatoração ou partes de um todo
  - S03.H4: compreender a noção de equivalência de frações e suas interpretações aritméticas e geométricas, identificando frações equivalentes por métodos aritméticos ou geométricos
  - S03.H5: utilizar, de modo correto e justificado, critérios aritméticos e geométricos de equivalência e comparação de frações
  - S03.H8: reconhecer usos e equivalências das representações de números racionais - escrita (por extenso), na forma fracionária e na forma decimal - em diferentes contextos e problemas
  - S03.H11: comparar números racionais, em representações fracionárias ou decimais
  - S03.H12: ordenar ou comparar números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, em particular por meio de sua localização na reta numérica
  - S03.H12: associar números naturais a pontos na reta numérica, determinando a localização de pontos correspondentes aos números
  - S03.H13: identificar a localização, na reta numérica, de números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais, associando pontos a números
  - S03.H14: efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, a adição ou subtração de números racionais, em suas representações fracionárias

- S03.H15: efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, a multiplicação ou divisão de números racionais, em suas representações fracionárias
- S03.H16: efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, operações aritméticas (soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) de números racionais, em suas representações fracionárias
- S03.H22: representar geometricamente (e.g., como translações, homotetias, áreas, etc.) os procedimentos e propriedades das operações aritméticas entre números racionais, usando a reta numérica ou outros modelos geométricos)
- S03.H23: efetuar aproximações, estimativas e arredondamentos de números racionais e dos resultados de operações aritméticas (somas, produtos, diferenças, quocientes e potências) entre esses números
- S03.H24: formular e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e com recurso a diferentes procedimentos, envolvendo a adição ou subtração de números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais
- S03.H25: formular e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e com recurso a diferentes procedimentos, envolvendo operações entre números racionais, em suas representações fracionárias ou decimais

Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC e os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes, mencionados anteriormente, estão diretamente associados aos seguintes descritores na **Matriz de Referência do SAEB para o nono ano**: D17, D21, D22, D23, D25 e D26 e têm correlação com os descritores D24, D28 e D29 (no contextos de representação decimal, porcentagens e proporcionalidade, tópicos a serem trabalhados em outros cadernos).

Em resumo, os saberes e habilidades (S03.H1, S03.H2, etc.) listados acima devem ser entendidos como **metas de aprendizagem** dos alunos, associadas às habilidades da BNCC e DCRC, para o sexto e sétimo anos, já mencionadas. Além disso, estabelecem uma base firme para os conhecimentos e habilidades demandados pelo SAEB e pelo SPAECE do nono ano, especialmente em relação aos descritores enumerados anteriormente.

Em seu planejamento curricular para **um mês**, recomendamos o trabalho com este caderno de modo a cobrir essas metas de aprendizagem. Na sequência, sugerimos um roteiro de uso do caderno com essa finalidade.

1.1.1 – Primeira quinzena

Na rotina pedagógica, propomos que, na primeira quinzena, sejam trabalhadas as seguintes seções:

- Frações equivalentes, 2.1 e comparando frações, 2.2: nestas seções, apresentamos a noção de equivalência de frações, essencial para a definição dos números racionais e para justificar os algoritmos das operações aritméticas que serão abordados na sequência. Enfatizamos a importância de considerar frações equivalentes como expressões de um dado comprimento na reta numérica, em relação a 0, tomado como ponto de referência: as medidas desse comprimento são dadas, em diferentes escalas ou unidades de medidas, por frações equivalentes entre si. Por exemplo, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ definem unidades de medida que são, respectivamente, 4 vezes e 6 vezes menores do que a unidade fixada, isto é, a distância de 0 a 1. Sendo assim, as frações equivalentes $\frac{9}{6}$ e $\frac{6}{4}$ definem um mesmo ponto na reta, ou seja, um número racional, cuja distância a 0 é medida por 9 vezes $\frac{1}{6}$ ou 6 vezes $\frac{1}{4}$. Essa concepção geométrica é aritmeticamente interpretada como o fato de que $9\times 4 = 6\times 6$, igualdade que segue da equivalência $\frac{9}{6} = \frac{6}{4}$, quando multiplicamos ambos os lados por 12, que é o *mínimo múltiplo comum* dos denominadores 4 e 6. Outra forma de constatar a equivalência é verificar que $\frac{9}{6} = \frac{18}{12} = \frac{6}{4}$. Essas diferentes maneiras de reconhecer a equivalência de frações devem ser trabalhadas conjuntamente para que os alunos possam superar as costumeiras dificuldades conceituais e técnicas representadas pelo uso das frações. Os exercícios 2.1 a 2.19 foram selecionados para fixação do conceito de equivalência e para o reconhecimento e utilização, pelo aluno, das várias representações das frações trabalhadas no texto. Os exercícios de 2.20 a 2.30 aprofundam o uso das representações das frações e apresentam alguns problemas em diferentes contextos. As sequências seguintes, de 2.31 a 2.44 e de 2.45 a 2.50 envolvem exercícios menos rotineiros, que reforçam a compreensão dos conceitos fundamentais.

- Adição e subtração, 3.1: partimos do que foi trabalhado sobre equivalência de frações para apresentarmos **algoritmos da adição de frações**, especialmente no caso em que essas frações têm denominadores diferentes e devem ser reescritas como frações equivalentes com denominadores comuns. Uma vez mais, é fundamental ressaltar a necessidade de determinar uma "unidade de medida" ou "escala" comum ao efetuar cálculos como em $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$, de modo a reescrever somas desse tipo na adição de parcelas que sejam equivalentes às iniciais, como em $\frac{10}{12} + \frac{9}{12}$. O objetivo precípuo, nessa seção, é desenvolver a percepção de que o procedimento que acabamos de descrever é naturalmente justificado, tanto do ponto de vista aritmético, quanto geométrico. Como antes, as duas primeiras sequências de exercícios são de fixação e de aprofundamento, enquanto as duas últimas abrangem contextos e problemas que envolvem criatividade e uma compreensão bem assentada dos conceitos vistos na seção.

Mencionamos, ainda, os **exercícios adicionais** como tarefas que possam ser usadas em **avaliações formativas** ao fim de cada quinzena. Use a seguinte tabela para seu planejamento nas duas primeiras semanas. O importante é que o planejamento cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. Ademais, é fundamental manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

Sequência	1ª Semana (1ª e 2ª aulas)	1ª Semana (3ª e 4ª aulas)	2ª Semana (1ª e 2ª aulas)	2ª Semana (3ª e 4ª aulas)
1	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.1 a 2.9	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.10 a 2.19	Seção 3.1, Exercícios 3.1 a 3.7	Seção 3.1, Exercícios 3.8 a 3.13
2	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.20 a 2.24	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.25 a 2.29	Seção 3.1, Exercícios 3.14 a 3.16	Seção 3.1, Exercícios 3.17 a 3.21
3		Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.30 a 2.38	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.39 a 2.44	
4		Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.45 a 2.47	Seções 2.1 e 2.2, Exercícios 2.48 a 2.50	

Tabela 1.1: Primeira quinzena

1.1.2 – Segunda quinzena

Nesta segunda quinzena, serão trabalhadas as seguintes seções:

- Multiplicação e divisão, 3.3: nessa seção, continuamos com o estudo das operações aritméticas com frações, desta vez a multiplicação e divisão. Trata-se de uma abordagem introdutória desse tema, que será aprofundado nos cadernos seguintes, em particular no que diz respeito a interpretações geométricas. O intuito principal foi o de justificar, a partir de problemas e modelos intuitivos, os algoritmos de multiplicação e divisão de frações, especialmente o procedimento usual de divisão, normalmente enunciado como "a primeira fração vezes o inverso da segunda". Mais uma vez, o tema recorrente das mudanças de unidade ou de escala, visualizada com o apoio da reta numérica, ajuda na compreensão e no desenvolvimento da intuição sobre esse algoritmo: se medirmos um dado comprimento em uma dada escala e obteremos 2. Já em em uma escala com unidades 3 vezes menor, obteremos 6, isto é, $2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 6$. Se uma dada quantidade de açúcar corresponde a $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ xícara de café, essa mesma quantidade corresponderá a 3 xícaras de chá, caso uma xícara de chá tenha capacidade igual a $\frac{1}{2}$ da capacidade da xícara de café. Ao representar esse cálculo em símbolos, temos: $\frac{3}{2} \div \frac{1}{2} = 3 = \frac{3}{2} \times 2$. Seguindo o mesmo padrão das seções anteriores, as duas primeiras sequências de exercícios são de fixação e de aprofundamento, enquanto as duas últimas abrangem contextos e problemas que envolvem criatividade e uma compreensão bem assentada dos conceitos vistos na seção. Chamamos a atenção para os exercícios que requerem simplificações de frações em multiplicações e divisões de frações. Técnicas como essas, que facilitam os cálculos, são vistas e aceitas como regras que permitem "cortar" termos (em numeradores e denominadores). Visto que essas "regras" parecem arbitrárias, não é de se estranhar que gerem incompreensão e erro, aumentando a insegurança dos alunos sobre quando pode "cortar" e onde "cortar" os números representados nas frações, o que pode conduzir a erros crônicos como em:

$$\frac{\cancel{10}+2}{\cancel{10}+6}=\frac{2}{6} \qquad \text{ou em} \qquad \frac{2}{10}\div\frac{10}{5}=\frac{2}{5}.$$

Podemos aproveitar a discussão dos exercícios a respeito desses procedimentos para mostrar que essas "simplificações" ou "cortes" são plenamente explicados pela própria definição de fração e pelas propriedades da multiplicação ou divisão.

Mencionamos, ainda, os **exercícios adicionais**, como tarefas que possam ser usadas em **avaliações formativas** ao fim de cada quinzena.

Use a seguinte tabela para seu planejamento das duas últimas semanas. O importante é que cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. O fundamental é manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

Sequência	1ª Semana (1ª e 2ª aulas)	1ª Semana (3ª e 4ª aulas)	2ª Semana (1ª e 2ª aulas)	2ª Semana (3ª e 4ª aulas)
1	Seção 3.3, Exercícios 3.42 a 3.50			
2	Seção 3.1, Exercícios 3.22 a 3.24	Seção 3.3, Exercícios 3.51 a 3.54	Seção 3.3, Exercícios 3.55 a 3.61	
3		Seção 3.1, Exercícios 3.25 a 3.29	Seção 3.1, Exercícios 3.30 a 3.33	Seção 3.3, Exercícios 3.62 a 3.67
4		Seção 3.1, Exercícios 3.34 a 3.35	Seção 3.1, Exercícios 3.36 a 3.41	Seção 3.3, Exercícios 3.68 a 3.75

Tabela 1.2: Segunda quinzena

2 Frações: conceitos iniciais

Neste capítulo, vamos estudar as *frações* com probleminhas simples que nos mostram a necessidade de ampliarmos o conjunto de números que usamos, até agora restrito aos números naturais e inteiros.

Na escola, usamos frações para simbolizar o resultado de uma divisão como $15 \div 6$, que expressamos como a fração

$$\frac{15}{6}.$$

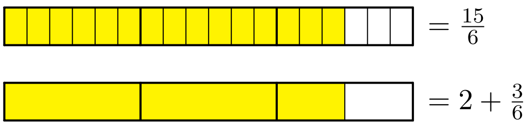
Lembremos que, ao dividir 15 por 6, obtemos um quociente 2 e um *resto* 3, ou seja,

$$15 = 6 \times 2 + 3.$$

Dividindo o resto 3 pelo divisor 6, não obtemos um número inteiro e sim um número fracionário

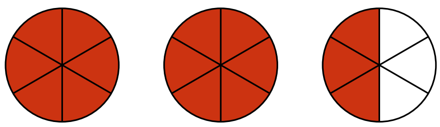
$$\frac{3}{6},$$

que podemos interpretar como uma *parte* de uma unidade. É bastante comum visualizarmos essa operação de divisão e as frações usando **barras**, como na figura a seguir



em que a primeira barra é dividida em retângulos menores, *agrupados* de 6 em 6. Portanto, 15 unidades equivalem a 2 *grupos* de 6 e **parte** de outro grupo de 6, que corresponde a 3 das 6 unidades neste grupo. A segunda barra representa esses 2 grupos de 6 e a fração do terceiro grupo. Observe que a **unidade de medida** na segunda barra é 6 vezes *maior* do que na primeira.

Podemos também visualizar e interpretar as frações em termos de **gráficos de setores** ou **pizzas**, para dar-lhes um nome mais atraente. Se cada unidade ou pizza é dividida em seis partes iguais — fatias, 15 dessas partes podem ser representadas na seguinte figura,



em que as 15 fatias destacadas correspondem a 2 pizzas inteiras e $\frac{3}{6}$ da terceira pizza, ou seja, as 3 fatias das 6.

Em resumo, seja usando barras ou pizzas, vemos que a fração $\frac{3}{6}$ resulta da divisão $15 \div 6$, que calculamos, em termos de frações, como:

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6},$$

Vejamos um problema, relacionado a *unidades de medida* de comprimento ou distância em que frações como essa podem surgem naturalmente.

> **Problema 1** Uma medida tradicional de comprimento (distância), usada pelos habitantes da zona rural, é a **légua**. Se 1 légua corresponde a 6 quilômetros, quantas léguas correspondem a 15 quilômetros?

Para resolvermos o problema 1, consideramos as duas retas numéricas abaixo, em que os números na primeira indicam distâncias em quilômetros e os números na segunda, distância em léguas.

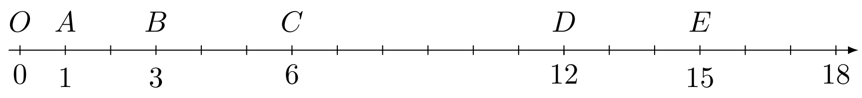


Figura 2.1: Distâncias em quilômetros.

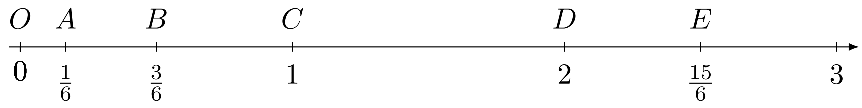


Figura 2.2: Distâncias em léguas.

Comparando essas escalas, vemos que

- o ponto C corresponde a uma distância de 6 quilômetros ou 1 légua,
- o ponto D corresponde a uma distância de 12 quilômetros ou 2 léguas,
- o ponto A corresponde a uma distância de 1 quilômetro ou $\frac{1}{6}$ de légua,
- o ponto B corresponde a uma distância de 3 quilômetros ou $\frac{3}{6}$ de légua e
- o ponto E corresponde a uma distância de 15 quilômetros ou $\frac{15}{6}$ léguas.

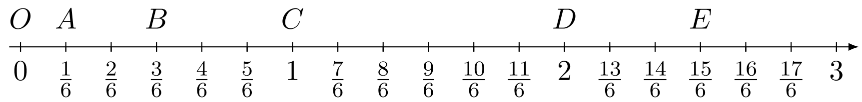


Figura 2.3: Conversão de quilômetros em léguas: 1 quilômetro é igual a $\frac{1}{6}$ de légua e 1 légua é igual a 6 quilômetros.

As **frações**

$$0 = \frac{0}{6}, \quad \frac{1}{6}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{4}{6}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{6} = 1, \quad \frac{7}{6}, \ldots$$

lidas como "um sexto", "dois sextos", e assim por diante, representam pontos que dividem a reta numérica em segmentos de comprimentos iguais. Por exemplo, a distância entre os pontos O e C, igual a 1 milha, é 6 *vezes maior* do que a distância do ponto O ao ponto A, que é igual à **fração**

$$\frac{1}{6}$$

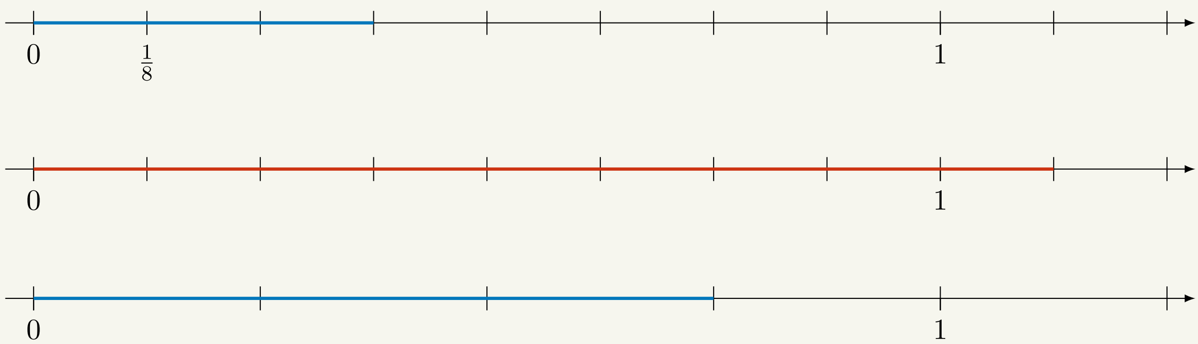
de milha. Assim,

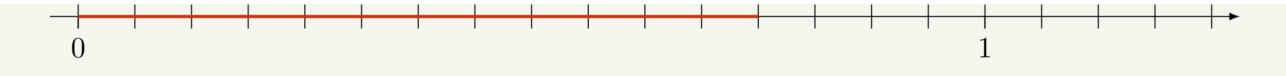
$$6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Da mesma forma, a distância entre os pontos O e B é dada pela fração $\frac{3}{6}$ e é 3 vezes maior do que a distância entre os pontos O e A, ou seja,

$$3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6}.$$

Exercício 2.1 Escreva a fração correspondente aos segmentos destacados (mais escuros) nas retas numéricas abaixo.





Solução. Na primeira figura, o segmento de 0 a 1 está *particionado* em 8 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{8}$. O segmento destacado tem 3 vezes esse comprimento. Portanto, mede

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\cdot$$

Na segunda figura, o segmento destacado é 3 vezes maior do que aquele destacado na figura anterior e 9 vezes maior do que o segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Logo, sua medida é igual a

$$3\times\frac{3}{8}=\frac{9}{8}\quad \text{ou}\quad 9\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}\cdot$$

Observamos que

$$\frac{9}{8}=\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=1+\frac{1}{8}\cdot$$

Na terceira figura, o segmento de 0 a 1 é particionado em 4 segmentos de comprimentos iguais a $\frac{1}{4}$. Desse modo, o segmento destacado equivale a 3 segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$, isto é, mede $\frac{3}{4}$. Observe que cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ tem o dobro do comprimento do segmento de comprimento $\frac{1}{8}$. Portanto,

$$\frac{3}{4}=3\times\frac{1}{4}=3\times2\times\frac{1}{8}=\frac{6}{8}\cdot$$

Logo, as frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$ indicam o mesmo comprimento:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\cdot$$

Dizemos, assim, que são frações **equivalentes**.

Na última figura, temos um segmento destacado de mesmo comprimento que o da terceira figura. Note que, na terceira figura, cada um dos 4 segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 é 4 vezes maior do que os segmentos que particionam o segmento de 0 a 1 na quarta figura, onde a unidade está dividida em 16 partes iguais. Logo, cada um dos segmentos menores na quarta figura mede

$$\frac{1}{4}\div 4=\frac{1}{16}$$

e o segmento destacado mede

$$12\times\frac{1}{16}=\frac{12}{16}\cdot$$

Comparando os segmentos destacados na terceira e na quarta figuras, concluímos que suas medidas são iguais, isto é,

$$\frac{3}{4}=\frac{12}{16},$$

encontrando mais um exemplo de frações equivalentes. ■

Observação 2.1 Em todos os exemplos que discutimos, usamos a reta numérica e associamos as frações a medidas de distância ou comprimento. No entanto, podemos usar a reta e as frações em outros contextos, envolvendo outras grandezas e medidas. Na verdade, frações são formas de representar os **números racionais**, que são objetos matemáticos abstratos e, portanto, cuja definição não requer que sejam medidas de algo concreto.

Observação 2.2 — Nota ao(à) professor(a). Neste ponto, convém usar as representações das frações em retas com diversas graduações (assim como em "pizzas" com diferentes números de fatias ou barras com diferentes números de subdivisões para explorar as ideias de equivalência de frações (que podemos entender como o efeito da mudança de "unidades de medida" ou de "escala", alterando proporcionalmente o total de partes do todo e o total de partes consideradas). Da mesma forma, essas representações das frações permitem uma introdução bastante intuitiva da adição, multiplicação e mesmo divisão de frações, como acabamos de ver.

A esse respeito, considere a seguinte situação-problema, em que as frações representam uma grandeza bem diferente de comprimento ou distância. Mesmo assim, usaremos sua *representação* como pontos na reta numérica.

Exercício 2.2 Em uma prova, um aluno acertou 15 questões, o que corresponde a $\frac{5}{7}$ do total de questões. Nesta prova havia quantas questões?

(a) 20 (b) 21 (c) 28 (d) 30 (e) 35

Solução. Vamos representar o total de questões da prova pelo segmento de reta entre os pontos 0 e 1 na reta numérica. Sendo assim, particionamos esse segmento em 7 segmentos de mesmo comprimento e destacamos 5 desses segmentos para representar o total de questões respondidas corretamente.

Como 5 dos segmentos menores correspondem a 5/7 do total de questões, ou seja, a 15 questões, cada um desses segmentos corresponde a $15 \div 5 = 3$ questões. Isso pode ser visualizado, na próxima figura, **particionando** cada segmento menor em 3 partes e observando que, agora, cada parte corresponde a uma questão. Portanto, os 7 segmentos, que representam o total de questões da prova, correspondem a $7 \times 3 = 21$ questões.

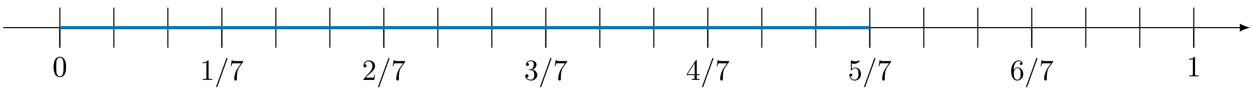


Figura 2.4: $\frac{5}{7}$ do segmento ou 15 questões.

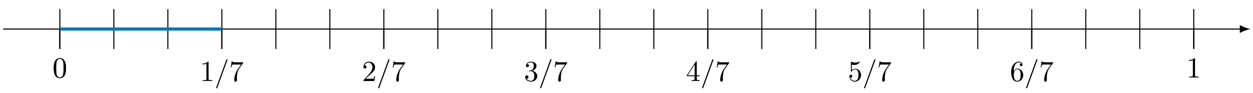


Figura 2.5: $\frac{1}{7}$ do segmento ou 3 questões.

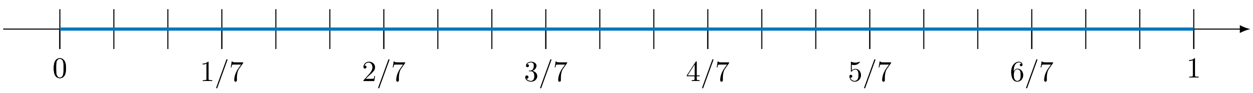


Figura 2.6: $\frac{7}{7}$ do segmento, o segmento inteiro ou $7 \times 3 = 21$ questões.

Logo, a alternativa correta é a de letra (b). ■

Observação 2.3 Uma forma de denotar frações em que o numerador é maior que o denominador — frações inadequadamente chamadas de *impróprias* — é escrevê-las como uma soma, mas omitindo o sinal +. No exemplo anterior, tínhamos

$$\frac{9}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4},$$

que foi denotada por

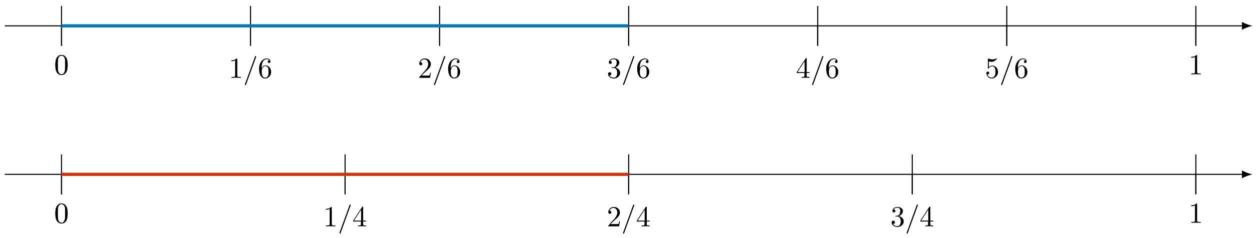
$$2\frac{1}{4}.$$

2.1 – Frações equivalentes

Diferentes frações podem representar uma mesma quantidade — um mesmo segmento na reta numérica. Essa frase ficará mais precisa quando estudarmos os chamados **números racionais**. Por ora, vamos entender geometricamente o que significa essa afirmação. Dizemos que as frações

$$\frac{2}{4} \quad \text{e} \quad \frac{3}{6}$$

são **equivalentes** por representarem o mesmo ponto na reta numérica. De fato, temos



Duas frações equivalentes representam o mesmo ponto nessas retas e, portanto, o mesmo comprimento, medido desde o ponto 0. Temos, então, uma igualdade ou **equivalência** de frações:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Note que se multiplicarmos cada um dos lados dessa igualdade por 12, que é um *múltiplo comum* de 4 e 6, a igualdade se mantém:

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times\frac{3}{6}.$$

Esta segunda igualdade é verdadeira, pois, do lado esquerdo, temos

$$12\times\frac{2}{4} = 12\times2\times\frac{1}{4} = 2\times12\times\frac{1}{4} = 2\times3 = 6,$$

enquanto o lado direito é dado por

$$12\times\frac{3}{6} = 12\times3\times\frac{1}{6} = 3\times12\times\frac{1}{6} = 3\times2 = 6.$$

Como a segunda igualdade é verdadeira, a primeira também o é. Logo, "comprovamos" que as frações são equivalentes.

De modo geral, as frações $\frac{m}{n}$ e $\frac{p}{q}$ são **equivalentes**, ou seja, a igualdade

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

é verdadeira *se, e somente se,*

$$q\times m = p\times n.$$

Nestas expressões, m,n, p e q são números naturais, com n e q diferentes de 0.

De fato, basta multiplicarmos cada um dos lados da igualdade pelo produto $q\times n$, obtendo

$$q\times n\times\frac{m}{n} = q\times n\times\frac{p}{q},$$

igualdade que pode ser reescrita como

$$q\times m\times n\times\frac{1}{n} = n\times p\times q\times\frac{1}{q},$$

donde concluímos que

$$q\times m = n\times p.$$

Usando a definição acima de equivalência de frações, vamos, agora, apresentar algumas **regras práticas** para verificar se duas frações são equivalentes.

Observação 2.4 Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fração **por um mesmo número** a natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente. De fato,

$$\frac{m}{n} = \frac{m \times a}{n \times a}$$

visto que

$$m \times n \times a = n \times m \times a.$$

Da mesma forma,

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}.$$

Neste caso, a deve ser um *divisor ou fator comum* de m e n com $m : a = p$ e $n : a = q$. Assim, temos

$$\frac{m}{n} = \frac{p \times a}{q \times a} = \frac{p}{q} = \frac{m : a}{n : a},$$

como queríamos demonstrar.

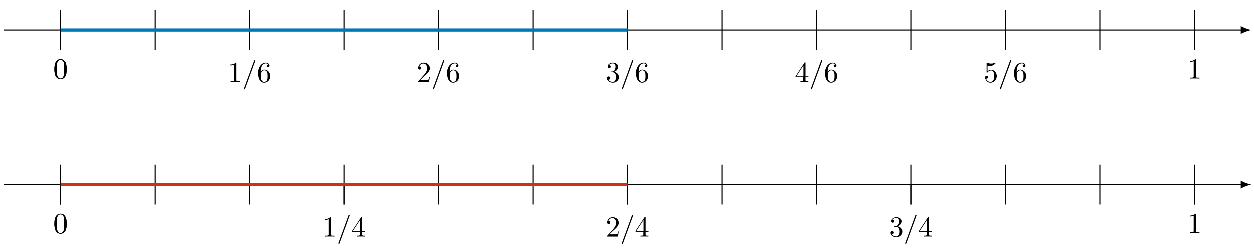
Por exemplo, no caso das frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{6}$, multiplicando *tanto* o numerador *quanto* o denominador por 3 e por 2, respectivamente, obtemos

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6}{12}$$

e

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \times 2}{6 \times 2} = \frac{6}{12},$$

o que corresponde, na reta, a particionarmos cada segmento de comprimento $\frac{1}{4}$ em 3 partes e cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ em 2 partes, conforme representado nas seguintes figuras.



Note que os comprimentos realçados nos dois segmentos são iguais, o que justifica, geometricamente, a equivalência das frações.

Recapitulando, quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, aumentamos a quantidade de partes nas quais um dado segmento é dividido, bem como aumentamos *proporcionalmente* a quantidade de partes tomadas. Por outro lado, quando dividimos o numerador e o denominador por um mesmo natural diferente de zero, diminuímos *proporcionalmente* essas quantidades de partes. Em ambos esses casos, obtemos uma fração equivalente à inicial.

Uma infinidade de frações equivalentes a uma dada fração pode ser obtida, portanto, multiplicando ou dividindo numerador e denominador por um mesmo fator. Por exemplo, multiplicando-os por 2, 3, 4, e assim por diante, temos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = \ldots$$

Da mesma forma, divisões sucessivas do numerador e denominador (isto é, *simplificações* das frações) produzem uma sequência de frações equivalentes

$$\ldots = \frac{32}{20} = \frac{24}{15} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

em que a última é **irredutível**. Isto significa que 5 e 8 não têm *divisores comuns* além de 1. Portanto, não há mais como dividir, com resto 0, tanto o numerador quanto o denominador por um mesmo número.

Lembremos, de nossos estudos anteriores, em que, neste caso, dizemos que 5 e 8 são *primos entre si*, ou seja, MDC(5,8) = 1.

Exercício 2.3 Qual das frações abaixo **não** é equivalente a $\frac{12}{18}$.

(a) $\frac{6}{9}$ (b) $\frac{10}{16}$ (c) $\frac{4}{6}$ (d) $\frac{8}{12}$ (e) $\frac{2}{3}$

Solução. Uma possibilidade é simplificar as frações dadas, obtendo

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}.$$

Logo, $\frac{6}{9}$ e $\frac{2}{3}$ são frações equivalentes a $\frac{12}{18}$. Por outro lado,

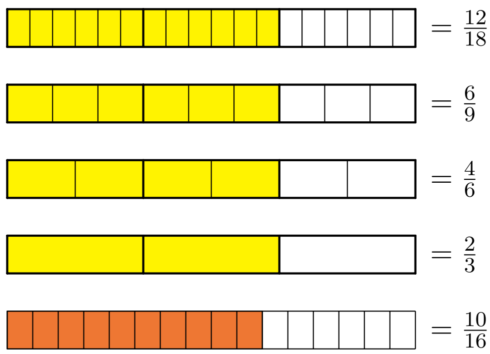
$$\frac{8}{12} = \frac{8 \div 2}{12 \div 2} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}.$$

Assim, $\frac{8}{12}$ também é equivalente a $\frac{12}{18}$. Finalmente,

$$\frac{10}{16} = \frac{10 \div 2}{16 \div 2} = \frac{5}{8}.$$

Mas, como $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ são frações irredutíveis diferentes, concluímos que $\frac{10}{16}$ e $\frac{12}{18}$ não são equivalentes. Portanto, a alternativa que apresenta uma fração que não é equivalente a $\frac{12}{18}$ é a letra (b).

Para entendermos esses cálculos geometricamente, representemos as frações utilizando **barras** de mesmo comprimento, como nas figuras abaixo, particionadas em 18, 9, 6, 3 ou 16 partes iguais, respectivamente:



Uma solução alternativa seria verificar as equivalências de $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$, o que também pode ser feito para as frações dos itens (c), (d), (e), calculando os produtos 12×9 e 6×18: como $12 \times 9 = 108 = 6 \times 18$, as frações $\frac{12}{18}$ e $\frac{6}{9}$ são equivalentes. Da mesma forma, $\frac{12}{18}$ não é equivalente a $\frac{10}{16}$ porque $12 \times 16 = 192$ e $10 \times 18 = 180$, logo, $12 \times 16 \neq 10 \times 18$.

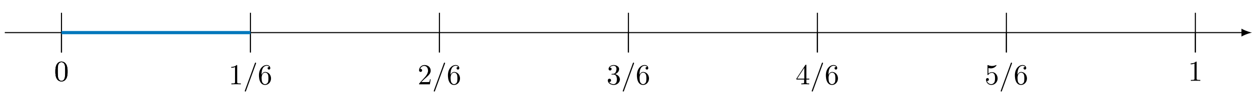
■

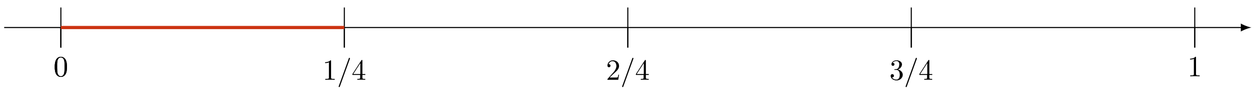
2.2 – Comparação de frações

Na seção anterior, estudamos a equivalência ou igualdade de frações. Agora, nosso intuito é *comparar* e *ordenar* frações. Começamos observando que, dados dois números naturais n e N com $n < N$ (lê-se: n é *menor* que N), temos

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{n}$$

(lê-se: $\frac{1}{N}$ é *menor* que $\frac{1}{n}$). Vejamos o exemplo em que $n = 4$ e $N = 6$:





Observe que cada um dos 6 segmentos entre 0 e 1 na primeira reta têm comprimento menor que cada um dos 4 segmentos entre 0 e 1 na segunda reta. Logo,

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4}.$$

Note que o ponto na reta numérica representado pela fração $\frac{1}{4}$ fica **à direita** do ponto representado pela fração $\frac{1}{6}$.

Observação 2.5 Dadas duas frações com **mesmo numerador** e denominadores diferentes, a maior fração é a de **menor denominador**. Dadas duas frações com **mesmo denominador** e numeradores diferentes, a maior fração é a de **maior numerador**. Por exemplo, observando as retas numéricas acima, comprovanos que

$$\frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}.$$

O próximo passo é justificar desigualdades da forma

$$\frac{2}{6} < \frac{3}{4}.$$

Note que, multiplicando cada um dos lados da desigualdade por 12, que é *múltiplo comum* de 4 e 6, mantemos a desigualdade com

$$12 \times \frac{2}{6} < 12 \times \frac{3}{4},$$

onde o lado esquerdo é dado por

$$12 \times \frac{2}{6} = 12 \times 2 \times \frac{1}{6} = 2 \times 12 \times \frac{1}{6} = 2 \times \frac{12}{6} = 2 \times 2 = 4$$

enquanto o lado direito é calculado como

$$12 \times \frac{3}{4} = 12 \times 3 \times \frac{1}{4} = 3 \times 12 \times \frac{1}{4} = 3 \times \frac{12}{4} = 3 \times 3 = 9,$$

ou seja, obtemos $4 < 9$, que é uma desigualdade verdadeira. Concluímos que a desigualdade inicial é também verdadeira.

A desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

é verdadeira **se, e somente se**

$$q \times m < n \times p.$$

De fato, multiplicando cada um dos lados da desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$$

pelo produto $n \times q$ dos denominadores, temos

$$n \times q \times \frac{m}{n} < n \times q \times \frac{p}{q}.$$

Logo

$$q \times m \times \frac{n}{n} < n \times p \times \frac{q}{q}$$

e, portanto,

$$q \times m < n \times p.$$

Observação 2.6 Para verificar a desigualdade

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q},$$

basta multiplicar cada um dos lados da desigualdade por um múltiplo comum dos denominadores n e q: por exemplo, o $\mathrm{MMC}(n, q)$.

Podemos usar algumas "regras práticas" para comparar ou ordenar frações. Por exemplo, para verificar a desigualdade

$$\frac{5}{8} < \frac{4}{6}$$

substituímos cada uma das frações da desigualdade por frações equivalentes, com mesmo denominador. O **denominador comum** pode ser, por exemplo, o *mínimo múltiplo comum* $\mathrm{MMC}(6{,}8) = 24$. Temos, então, as seguintes equivalências

$$\frac{5\times 3}{8\times 3} = \frac{15}{24}$$

e

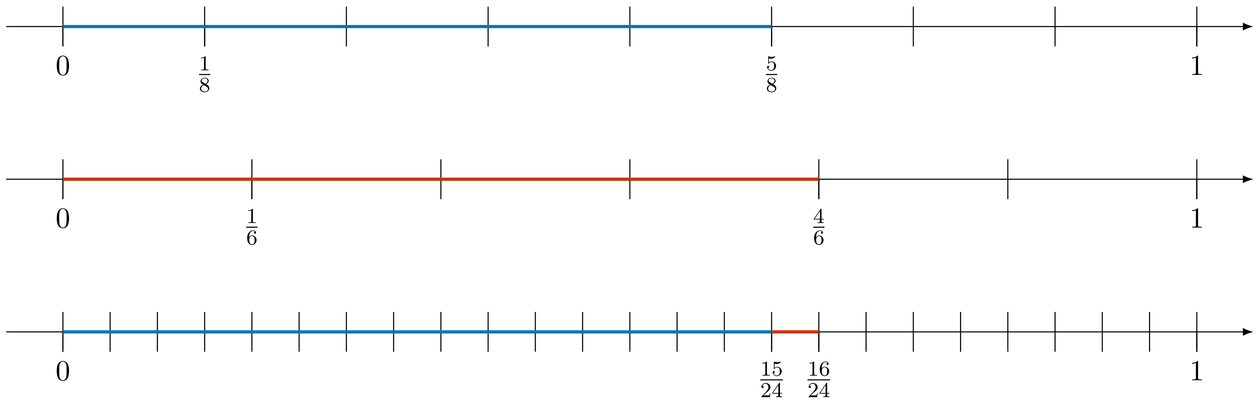
$$\frac{4\times 4}{6\times 4} = \frac{16}{24}.$$

Assim, a desigualdade que queremos verificar torna-se

$$\frac{15}{24} < \frac{16}{24},$$

que é uma desigualdade verdadeira.

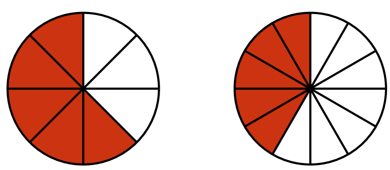
Podemos explicar essa comparação geometricamente com as seguintes retas numéricas:



Note que, da primeira para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{8}$ foi particionado em 3 partes, cada uma com comprimento igual a $\frac{1}{24}$, ao passo que, da segunda para a terceira reta, cada segmento de comprimento $\frac{1}{6}$ foi particionado em 4 partes, cada uma com comprimento também igual a $\frac{1}{24}$.

Exercício 2.4 Em uma pizzaria, todas as pizzas têm o mesmo sabor e o mesmo tamanho. Entretanto, cada pizza pode ser dividida em 8 ou em 12 pedaços iguais. Na semana passada, as amigas Gabi e Carol foram a essa pizzaria. Gabi pediu uma pizza dividida em 8 pedaços e comeu 5 desses pedaços. Carol pediu uma pizza dividida em 12 pedaços e também comeu 5 pedaços. Qual das duas comeu mais pizza?

Solução. Gabi comeu $\frac{5}{8}$ e Carol comeu $\frac{5}{12}$ de uma pizza, como representado nas seguintes figuras:



Gabi Carol

Como $8{\times}12 = 96$, temos que

$$\frac{5}{8} = \frac{5{\times}12}{8{\times}12} = \frac{60}{96} \quad \text{e} \quad \frac{5}{12} = \frac{5{\times}8}{12{\times}8} = \frac{40}{96}.$$

Assim, $\frac{5}{8}$ é equivalente a $\frac{60}{96}$ e $\frac{5}{12}$ é equivalente a $\frac{40}{96}$. Portanto, como $\frac{60}{96} > \frac{40}{96}$, concluímos que

$$\frac{5}{8} > \frac{5}{12},$$

ou seja, Gabi comeu mais pizza que Carol. ■

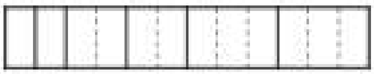
Observação 2.7 No exercício acima, observe que as duas amigas comeram o mesmo número de pedaços de pizza. Entretanto, os pedaços da pizza de Gabi eram maiores que os pedaços da pizza de Carol, pois a pizza de Gabi foi dividida em 8 pedaços mas a de Carol foi dividida em 12 pedaços. Portanto, sem fazer contas, podemos afirmar que $\frac{5}{8} > \frac{5}{12}$. Lembremos: quando duas frações têm o mesmo numerador, a maior delas é a que possui o **menor** denominador.

2.3 – Exercícios resolvidos e propostos

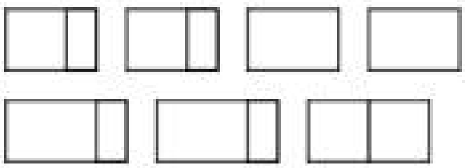
Exercício 2.5 João não sabe se estarão presentes 3 ou 4 pessoas no seu aniversário e precisa dividir seu bolo, não necessariamente em partes iguais, antes que a festa comece. Após a divisão na festa, ele quer que cada pessoa tenha recebido a mesma quantidade. Qual o número mínimo de pedaços em que o bolo deve ser cortado?

Solução. O número mínimo é 6 pedaços. Uma maneira é dividir é realizar cortes com os tamanhos correspondentes às seguintes frações do bolo:

$$1/12, 1/12, 1/6, 1/6, 1/4 \text{ e } 1/4.$$



Não podemos dividir em 4 pedaços, pois daí todos seriam iguais. Para verificar que não podem ser 5, basta analisar o que acontece se vierem 3 pessoas. Uma delas irá receber apenas um pedaço e, consequentemente, ela terá $1/3$ do tamanho total. Como $1/3 > 1/4$, se vierem 4 pessoas, uma delas receberá mais que $1/4$ do bolo e isso impedirá a divisão igualitária. Para ver se essa divisão funciona, basta observar que podemos arrumar os pedaços da divisão anterior de duas formas de modo que, em cada arrumação, as quantidades de bolos são iguais:



■

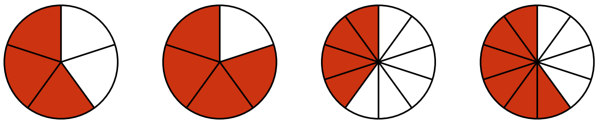
Sequência 1

Exercício 2.6 Represente geometricamente as seguintes frações, usando setores circulares ("pizzas") ou barras.

(a) $\frac{3}{5}$. (b) $\frac{4}{5}$. (c) $\frac{4}{10}$. (d) $\frac{6}{10}$.

Em seguida, coloque as frações em ordem crescente.

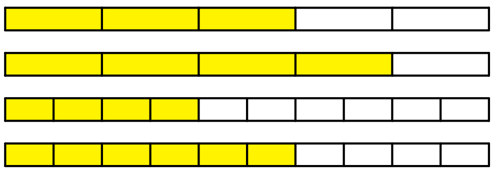
Solução. A figura seguinte traz as representações geométricas das frações usando "pizzas".



$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{6}{10}$

Observe, a partir dessas figuras, que $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$, o que é natural, visto que a primeira fração corresponde a 3 partes dentre 5 enquanto a segunda equivale a 4 partes dentre 5. Portanto, a segunda fração corresponde a *mais partes*. De modo similar, deduzimos que $\frac{4}{10} < \frac{6}{10}$. Também com base nas figuras observe que $\frac{4}{10} < \frac{4}{5}$. De fato, a primeira fração corresponde a 4 unidades divididas em 10 partes enquanto a segunda equivale a 4 unidades, mas divididas em 5 partes e, portanto, em *partes maiores*. Finalmente, note que $\frac{3}{5}$ e $\frac{6}{10}$ representam a mesma fração da pizza. Portanto, essas frações são equivalentes: $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Utilizando barras, as frações poderiam ser representadas do seguinte modo:



$= \frac{3}{5}$

$= \frac{4}{5}$

$= \frac{4}{10}$

$= \frac{6}{10}$

As barras deixam ainda mais claro que

$$\frac{4}{10} < \frac{3}{5} = \frac{6}{10} < \frac{4}{5}.$$

■

Exercício 2.7 Calcule o resultado das seguintes divisões usando frações:

(a) $\frac{11}{5}$. (b) $\frac{12}{5}$. (c) $\frac{13}{5}$. (d) $\frac{14}{5}$.

Em seguida, represente as frações utilizando segmentos da reta numérica. De quais números naturais essas frações estão *mais próximas*?

Solução. Dividindo 11 por 5, obtemos quociente 2 e resto 1, visto que

$$11 = 10 + 1 = 5 \times 2 + 1.$$

Logo

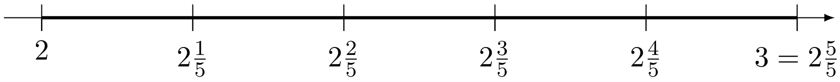
$$\frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}.$$

Da mesma forma, concluímos que

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \qquad \frac{13}{5} = 2 + \frac{3}{5} \qquad \frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

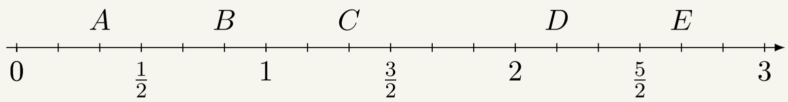
Logo, essas frações estão *localizadas* na reta numérica entre os pontos correspondentes a 2 e 3, uma vez que

$$2 < 2 + \frac{1}{5} < 2 + \frac{2}{5} < 2 + \frac{3}{5} < 2 + \frac{4}{5} < 2 + \frac{5}{5} = 2 + 1 = 3.$$



Concluímos que as frações $2\frac{1}{5}$ e $2\frac{2}{5}$ estão mais próximas do número natural 2 e as frações $2\frac{3}{5}$ e $2\frac{4}{5}$ estão mais próximas do número natural 3. ■

Exercício 2.8 Associe cada um dos pontos A, B, C, D e E a uma das frações nas alternativas seguintes:



(a) $\frac{13}{6}$ (b) $\frac{16}{12}$ (c) $\frac{8}{3}$ (d) $\frac{10}{12}$ (e) $\frac{2}{6}$

Exercício 2.9 Calcule as seguintes frações:

(a) $\frac{1}{5}$ de 75. (b) $\frac{2}{5}$ de 75. (c) $\frac{3}{5}$ de 75. (d) $\frac{4}{5}$ de 75.

Em seguida, represente-as utilizando barras.

Solução. Observamos que dividindo 75 em 5 partes iguais, cada uma dessas partes corresponde a $\frac{1}{5}$ de 75, ou seja, é igual a

$$\frac{1}{5}\times 75 = \frac{75}{5} = 15.$$

Somando essas 5 partes, temos $5\times 15 = 75$. Somando 2 dessas partes, obtemos

$$\frac{2}{5}\times 75 = 2\times\frac{75}{5} = 2\times 15 = 30.$$

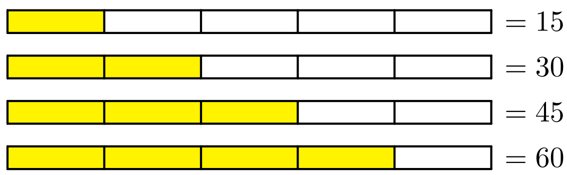
Da mesma forma, calculamos

$$\frac{3}{5}\times 75 = 3\times 15 = 45$$

e

$$\frac{4}{4}\times 75 = 4\times 15 = 60.$$

Representando essas **frações de** 75, utilizando barras, temos as seguintes ilustrações.



■

Exercício 2.10 Em um conjunto de 75 alunos, 30 são torcedores do Ceará e 45 são torcedores do Fortaleza. a) Quais frações do total de alunos representam os *subconjuntos* de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza? b) Qual a *razão* entre as quantidades de torcedores do Ceará e de torcedores de Fortaleza?

Solução. A **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Ceará é igual a

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{30}{75} = \frac{2}{5}$$

e a **fração** que corresponde ao subconjunto de torcedores do Fortaleza é dada por:

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos”}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}.$$

Note que $\frac{2}{5} + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$. A **razão** entre a quantidade de torcedores do Ceará e de torcedores do Fortaleza é dada por:

$$\frac{\text{“total de alunos torcedores do Fortaleza”}}{\text{“total de alunos torcedores do Ceará”}} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}.$$

■

Exercício 2.11 Quais das frações abaixo são equivalentes a $\frac{16}{10}$?

(a) $\frac{16+2}{10+2}$ (b) $\frac{16:2}{10:2}$ (c) $\frac{8\times 4}{5\times 4}$ (d) $\frac{64:4}{40:4}$ (e) $\frac{16-2}{10-2}$

Justifique sua resposta com cálculos e com representações geométricas das frações.

Exercício 2.12 Em uma turma da primeira série, há 6 alunas para cada 5 alunos. Essa *proporção* será a mesma, caso ingressem exatamente mais 2 alunos e 2 alunas nesta turma? E caso dobrássemos o número de alunos e o número de alunas? Justifique suas respostas com cálculos, barras, pizzas ou segmentos da reta numérica, conforme preferir.

Exercício 2.13 Localize as seguintes frações na reta numérica.

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{12}{9}$ (d) $\frac{12}{3}$ (e) $\frac{3}{12}$

Exercício 2.14 Compare e ordene as seguintes frações.

(a) $\frac{52}{25}$ (b) $\frac{52}{24}$ (c) $\frac{55}{25}$ (d) $\frac{52}{55}$ (e) $\frac{55}{52}$

Exercício 2.15 Calcule as seguintes frações.

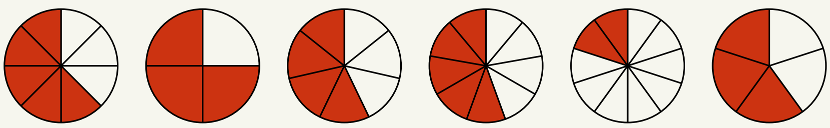
(a) $\frac{3}{4}$ de 180 (b) $\frac{4}{3}$ de 180 (c) $\frac{12}{3}$ de 180 (d) $\frac{3}{12}$ de 180

Exercício 2.16 Simplifique as seguintes frações, obtendo suas formas *irredutíveis*.

(a) $\frac{27}{125}$ (b) $\frac{144}{81}$ (c) $\frac{60}{128}$ (d) $\frac{145}{250}$ (e) $\frac{62}{58}$

Exercício 2.17 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas barras na seguinte figura?

Exercício 2.18 Qual fração representa a soma das frações ilustradas pelas “pizzas” na seguinte figura?



Exercício 2.19 — KangoTreino 4 - 2020. Qual é o valor da expressão

$$\frac{2020+2020+2020+2020+2020}{2019+2019+2019+2019+2019}?$$

(a) $\frac{1}{2020}$
(b) $\frac{2021}{2019}$
(c) $1 + \frac{1}{2019}$
(d) $\frac{20}{19}$
(e) 5

Sequência 2

Exercício 2.20 Uma coleção tem 300 selos.

(a) 100 selos correspondem a que fração da coleção?
(b) 200 selos correspondem a que fração da coleção?
(c) 60 selos correspondem a que fração da coleção?
(d) 180 selos correspondem a que fração da coleção?

Exercício 2.21 — SAT - adaptado. A tabela seguinte classifica 103 elementos químicos como metais, metalóides ou não-metais, e como sólidos, líquidos e gasosos em temperatura e pressão normais.

	Sólidos	Líquidos	Gasosos	Total
Metais	77	1	0	78
Metalóides	7	0	0	7
Não-metais	6	1	11	18
Total	90	2	11	103

Que fração de sólidos e de líquidos na tabela são metalóides?

Exercício 2.22 Em cada alternativa, ponha as frações em ordem crescente.

(a) $\dfrac{9}{7}$, $\dfrac{9}{11}$, $\dfrac{9}{20}$ e $\dfrac{9}{13}$.

(b) $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{2}{11}$, $\dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{2}{13}$.

(c) $\dfrac{8}{20}$, $\dfrac{6}{10}$, $\dfrac{3}{15}$ e $\dfrac{20}{25}$.

(d) $\dfrac{1}{6}$, $\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{1}{7}$ e $\dfrac{1}{9}$.

Em seguida, localize essas frações na reta numérica.

Exercício 2.23 Numa prova de Matemática havia 15 exercícios.

(a) José errou 5 exercícios dessa prova. Escreva a fração que representa o número de erros cometidos por José em relação ao total de questões da prova.
(b) Obtenha também a fração que representa o número de acertos de José.
(c) Henrique errou $\frac{1}{5}$ dos exercícios dessa prova. Quantos exercícios ele acertou?

Solução. A fração que representa a *razão* entre o número de erros cometidos por José e o número total de questões da prova é

$$\frac{\text{“número de erros”}}{\text{“número total de questões”}} = \frac{5}{15} = \frac{5:5}{15:5} = \frac{1}{3}.$$

Logo, podemos dizer que José errou $\frac{1}{3}$ das questões da prova. De fato, dividindo o número total de 15 questões em 3 partes iguais, temos partes com 5 questões, exatamente o número de questões em que José cometeu erros. Também concluímos que ele acertou 10 questões, ou seja, os outros $\frac{2}{3}$ da prova.

Agora, dividindo o número total de questões em 5 partes iguais, obtemos partes com 3 questões cada. Ou seja, $\frac{1}{5}$ do número de questões equivale a 3 questões. Essa foi a quantidade de acertos de Henrique. ■

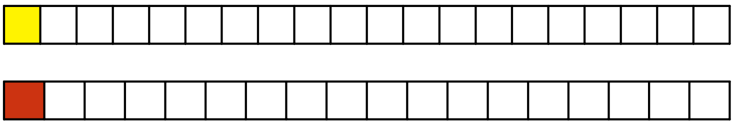
Exercício 2.24 Para encher $\frac{3}{4}$ de uma piscina, são necessários 30.000 litros de água. Qual é a capacidade da piscina?

Solução. Se $\frac{3}{4}$ da capacidade da piscina correspondem a 30.000 litros, $\frac{1}{4}$ corresponde a $30.000 \div 3 =$ 10.000 litros. Portanto, a capacidade total da piscina, ou seja, os $\frac{4}{4}$ de sua capacidade, corresponde a $4 \times 10.000 = 40.000$ litros. ∎

Exercício 2.25 Vinte amigos resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. O valor do aluguel deveria ser dividido igualmente entre todos eles. No entanto, no dia do passeio, dois dos vinte amigos desistiram, de forma que o valor do aluguel teve de ser dividido igualmente apenas entre aquelas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada um dos amigos que compareceu é

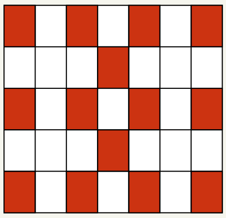
(a) $\dfrac{1}{20}$. (b) $\dfrac{18}{20}$. (c) $\dfrac{1}{10}$. (d) $\dfrac{1}{18}$. (e) $\dfrac{2}{18}$.

Solução. As barras abaixo representam a divisão do aluguel entre 20 pessoas e entre $20 - 2 = 18$ pessoas:



Com menos pessoas para dividir o aluguel, a fração que cada um deve pagar aumentou de $\frac{1}{20}$ para $\frac{1}{18}$. ∎

Exercício 2.26 Qual a forma irredutível da fração correspondente à região pintada de vermelho na bandeira representada abaixo?



Exercício 2.27 Mateus e Guilherme trabalham na mesma empresa e recebem o mesmo salário. Mateus economiza $\frac{1}{6}$ do seu salário, enquanto Guilherme economiza $\frac{2}{11}$. Qual dos dois consegue economizar mais?

Solução. Basta observarmos que $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$. Como

$$\frac{2}{12} < \frac{2}{11},$$

concluímos que Mateus economiza *menos* que Guilherme. ∎

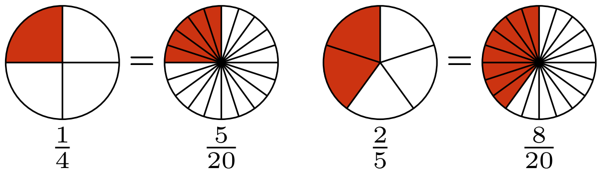
Exercício 2.28 César gastou $\frac{1}{4}$ da mesada na compra de um livro e $\frac{2}{5}$ na compra de duas revistas.

(a) Qual das compras foi a mais cara?
(b) Se César tinha 120 reais, com quantos reais ele ficou?

Solução. Observe que o mínimo múltiplo comum aos denominadores 4 e 5 é 20, o produto dos dois denominadores. Vimos antes que isso ocorre porque 3 e 5 não têm fatores comuns, isto é, são primos entre si. Portanto, temos as seguintes equivalências de frações

$$\frac{1}{4} = \frac{1\times 5}{4\times 5} = \frac{5}{20} \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20},$$

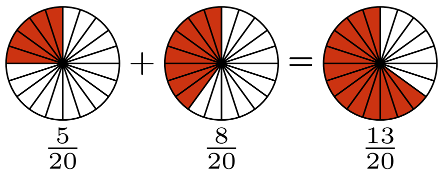
representada nas seguintes “pizzas”:



Concluímos que as duas revistas, juntas, são mais caras que o livro. Além disso, *somando* as frações da mesada, representadas pelas duas compras, deduzimos que César gastou

$$\frac{5}{20} + \frac{8}{20} = \frac{13}{20}$$

de sua mesada. Representando essa soma com “pizzas”, temos



Como a mesada é de 120 reais, $\frac{1}{20}$ da mesada é igual a $120 \div 20 = 6$ reais. Logo, $\frac{13}{20}$ da mesada equivalem a $13\times 6 = 78$ reais. Portanto, após as compras, César ficou com $120 - 78 = 120 - 80 + 2 = 42$ reais. Note que esses 42 reais restantes correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \text{ da mesada.}$$

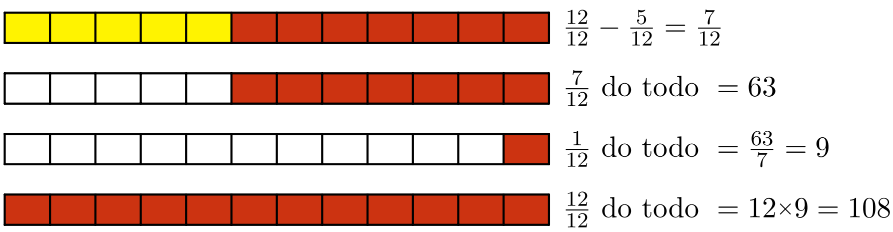
De fato, como $\frac{1}{20}$ da mesada são 6 reais, $\frac{7}{20}$ dela são $7\times 6 = 42$ reais. ■

Exercício 2.29 Fernando juntou $\frac{5}{12}$ das figurinhas de um álbum de jogadores de futebol. Ainda faltam 63 figurinhas para completar o álbum. Quantas figurinhas tem o álbum completo?

Solução. As 63 figurinhas que *faltam* correspondem a

$$\frac{12}{12} - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

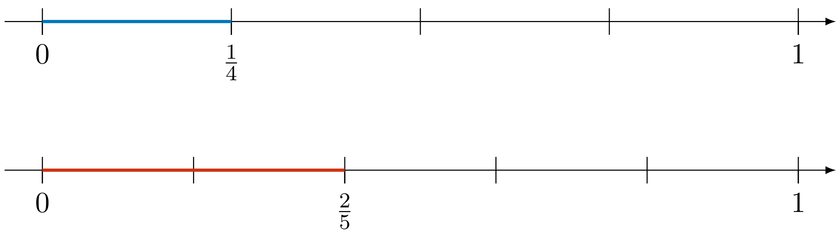
do total de figurinhas do álbum completo. Logo, $\frac{1}{12}$ do total de figurinhas equivale a $63 : 7 = 9$ figurinhas. Portanto, o álbum completo tem $12\times 9 = 108$ figurinhas. Representemos essa solução com o uso de barras.



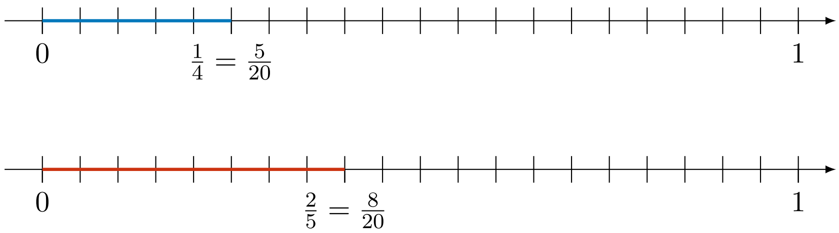
■

Exercício 2.30 Na última eleição para a prefeitura da cidade de Numeropólis, os candidatos Arquimedes e Euclides obtiveram, respectivamente, $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ do total de votos válidos. Sabendo que o restante do total de votos válidos, ou seja, 6.300 votos, foi dado ao candidato Tales, pergunta-se: quantos votos cada um dos candidatos recebeu? Qual dos três candidatos foi eleito?

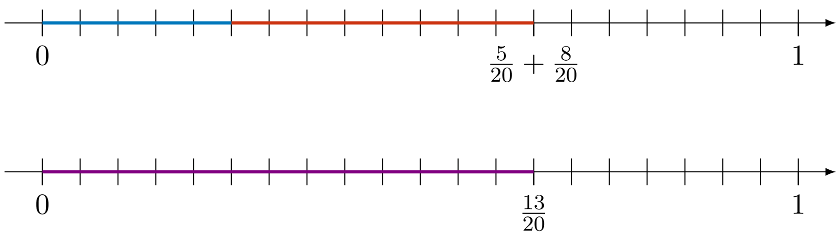
Solução. Representemos as frações de votos válidos dos candidatos Arquimedes e Euclides por pontos na reta numérica como segue



Particionando cada um dos 4 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na primeira reta em 5 partes iguais e cada um dos 5 segmentos de comprimentos iguais entre 0 e 1 na segunda reta em 4 partes iguais, obtemos



Somando essas duas frações, obtemos



Esses $\frac{13}{20}$ dos votos válidos correspondem ao total de votos dos candidatos Arquimedes e Euclides. Logo, os votos válidos restantes, do candidato Tales, correspondem a

$$\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

dos votos. Assim, $\frac{7}{20}$ dos votos equivalem a 6.300 votos. Portanto, $\frac{1}{20}$ dos votos é igual a $6.300 \div 7 = 900$. Assim, o total de votos é igual a $12 \times 900 = 10.800$ votos. Concluímos que a distribuição de votos válidos foi a seguinte:

(a) votos recebidos por Arquimedes: $\frac{5}{20}$ dos votos válidos, ou $5 \times 900 = 4.500$ votos;
(b) votos recebidos por Euclides: $\frac{8}{20}$ dos votos válidos, ou $8 \times 900 = 7.200$ votos;
(c) votos recebidos por Tales: $\frac{7}{20}$ dos votos válidos, ou $7 \times 900 = 6.300$ votos,

o que comprova que Euclides foi o candidato vencedor. ■

Sequência 3

Exercício 2.31 — Revista Canguru 2020. Qual das frações a seguir tem o maior valor?

(a) $\frac{8+5}{3}$ (b) $\frac{8}{3+5}$ (c) $\frac{3+5}{8}$ (d) $\frac{8+3}{5}$ (e) $\frac{3}{8+5}$

Solução. Note que as frações em (b) e (c) são ambas iguais a 1, uma vez que

$$\frac{3+5}{8} = \frac{8}{8} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{8}{3+5} = \frac{8}{8} = 1.$$

Além disso, a fração em (e) é menor que 1, pois

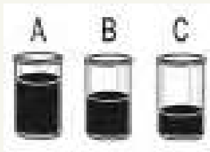
$$\frac{3}{8+5} = \frac{3}{13} < 1.$$

Finalmente, comparemos as frações em (a) e (d), ambas *maiores* que 1. Temos

$$\frac{8+5}{3} = \frac{13}{3} = \frac{65}{15} \qquad \text{e} \qquad \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5} = \frac{33}{15}.$$

Concluímos que a fração na alternativa (a) é maior que a fração na alternativa (d) e, portanto, é a maior das cinco. ■

Exercício 2.32 — Banco OBMEP 2006.
Três frascos, todos com capacidade igual a um litro, contêm quantidades diferentes de um mesmo líquido, conforme ilustração a seguir. Qual das alternativas abaixo melhor expressa, aproximadamente, o volume de líquido contido nos frascos A, B e C, nesta ordem?



(a) $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}$.

(b) $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$.

(c) $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{2}{4}$.

(d) $\frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}$.

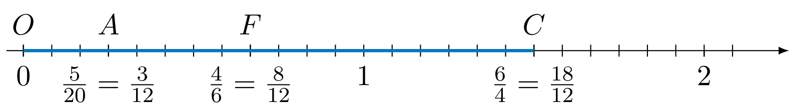
(e) $\frac{3}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$.

Exercício 2.33 — ENEM 2014. André, Carlos e Fábio estudam em uma mesma escola e desejam saber quem mora mais perto da escola. André mora a cinco vinte avos de um quilômetro da escola. Carlos mora a seis quartos de um quilômetro da escola. Já Fábio mora a quatro sextos de um quilômetro da escola.

A ordenação dos estudantes de acordo com a ordem decrescente das distâncias de suas respectivas casas à escola é

(a) André, Carlos e Fábio.
(b) André, Fábio e Carlos.
(c) Carlos, André e Fábio.
(d) Carlos, Fábio e André.
(e) Fábio, Carlos e André.

Solução. Representemos na seguinte reta numéricas as distâncias das casas de André, o ponto A, Carlos, ponto C, e Fábio, o ponto F, à escola , o ponto O (origem), que são, respectivamente, dadas pelas frações $\frac{5}{20}$, $\frac{6}{4}$ e $\frac{4}{6}$:



Para comparar essas distâncias, observamos, primeiro, que

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} < 1 < \frac{6}{4}$$

Além disso, $\frac{4}{6} < 1 < \frac{6}{4}$ e

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \frac{4}{6}.$$

Logo, a ordem crescente deve ser $\frac{5}{20} < \frac{4}{6} < \frac{6}{4}$, o que corresponde à alternativa (b).

Observação 2.8 Para verificar essa ordem de outro modo, podemos usar as seguintes equivalências das frações:

$$\frac{4}{6} = \frac{4\times 2}{6\times 2} = \frac{8}{12} \quad \text{e} \quad \frac{6}{4} = \frac{6\times 3}{4\times 3} = \frac{18}{12}.$$

Temos também

$$\frac{5}{20} = \frac{5:5}{20:5} = \frac{1}{4} = \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{12}.$$

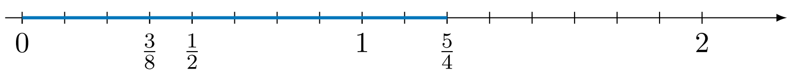
Assim, uma vez que $\frac{3}{12} < \frac{8}{12} < \frac{18}{12}$, como representado na reta, comprovamos a resposta que já tínhamos deduzido.

■

Exercício 2.34 — ENEM 2016. Nas construções prediais são utilizados tubos de diferentes medidas para a instalação da rede de água. Essas medidas são conhecidas pelo seu diâmetro, muitas vezes medido em polegada. Alguns desses tubos, com medidas em polegada, são os tubos de 1/2, 3/8 e 5/4. Colocando os valores dessas medidas em ordem crescente, encontramos

(a) 1/2, 3/8, 5/4.
(b) 1/2, 5/4, 3/8.
(c) 3/8, 1/2, 5/4.
(d) 3/8, 5/4, 1/2.
(e) 5/4, 1/2, 3/8

Solução. Note que $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ e $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$. Portanto, temos a representação das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$, na reta numérica, como segue.

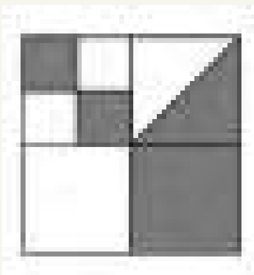


Logo, a ordem correta é a que aparece na alternativa (c).

■

Exercício 2.35 Determine a localização e a distância entre os pontos na reta numérica que representam as frações $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{4}$. Faça o mesmo para as frações $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{4}$.

Exercício 2.36 — Revista Canguru 2020. Num desses quadrados menores também foi desenhada uma diagonal.



Qual fração do quadrado original foi escurecida?

(a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{3}{8}$ (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Exercício 2.37 — Banco OBMEP. Qual dos números a seguir está situado entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

(a) $\frac{1}{6}$. (b) $\frac{4}{3}$. (c) $\frac{5}{2}$. (d) $\frac{4}{7}$. (e) $\frac{1}{4}$.

Solução. Inicialmente, observamos que

$$\frac{2}{5} < \frac{3}{4}$$

De fato, multiplicando ambos os lados dessa desigualdade pelo *múltiplo comum* 20 — múltiplo comum dos denominadores, temos, do lado esquerdo

$$20\times\frac{2}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

e, do lado direito,

$$20\times\frac{3}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

De modo similar, demonstra-se que

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{5}$$

bastando, para isso, multiplicar ambos os lados pelo múltiplo comum 20, obtendo $5 < 8$.

Agora, observamos que

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{5} < \frac{2}{5}.$$

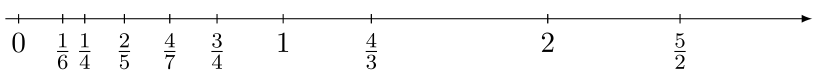
Além disso, ambas as frações $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ e $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ são maiores que 1 e, portanto, maiores que $\frac{3}{4}$. Resta, portanto, verificarmos se $\frac{4}{7}$ *está entre* $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{4}$. Temos

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{7},$$

uma vez que, multiplicando os dois lados da desigualdade por 35, obteremos $2\times7 = 14 < 5\times4 = 20$. Do mesmo modo, para verificar que

$$\frac{4}{7} < \frac{3}{4},$$

multiplicamos ambos os lados da desigualdade por 28, obtendo $16 < 21$. Portanto, a alternativa correta é a de letra (d). Para finalizar, representemos essas cinco frações na reta numérica de acordo com a figura que segue.



■

Exercício 2.38 Em cada planeta do Sistema Solar, um ano (período orbital) pode ser definido como o número de dias terrestres para que o planeta complete uma volta em torno do Sol. Vejamos, na tabela que segue, a duração aproximada dos anos em alguns planetas.

	Mercúrio	Vênus	Terra	Marte
Dias	88	225	365	686

Um ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a qual fração de um ano em Marte ?

Solução. Note que 1 (um) ano em Mercúrio corresponde a 88 dias Terrestres:

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = 88 \text{ “dia Terrestre”}.$$

Por outro lado, 88 dias na terra correspondem a 88/686 de um ano em Marte:

$$88 \text{ “dia Terrestre”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Logo, deduzimos que

$$1 \text{ “ano Mercuriano”} = \frac{88}{686} \text{ “ano Marciano”}.$$

Essa fração pode ser simplificada:

$$\frac{88 \div 2}{686 \div 2} = \frac{44}{343}.$$

Com a possibilidade de *aproximar* esta fração por

$$\frac{40}{320} = \frac{1}{8},$$

podemos afirmar que 1 ano em Mercúrio corresponde, aproximadamente, a $\frac{1}{8}$ de ano em Marte ou, equivalentemente, que 1 ano em Marte equivale a 8 anos em Mercúrio!

Observação 2.9 Essa é uma boa aproximação, visto que, dividindo 686 por 88, obtemos

$$\frac{686}{88} = \frac{616+70}{88} = \frac{616}{88} + \frac{70}{88} = 7 + \frac{70}{88},$$

ou seja, temos 7 anos e um **excesso** de 70 dias — dentro de 88 dias — ou

$$\frac{686}{88} = \frac{704-18}{88} = \frac{704}{88} - \frac{18}{88} = 8 - \frac{18}{88},$$

ou seja, temos 8 anos e uma **falta** de apenas 18 dias — dentro de 88 dias.

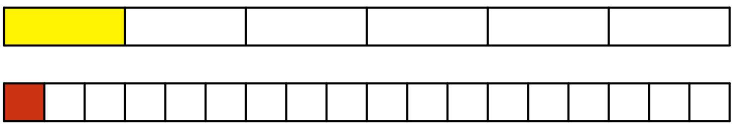
■

Exercício 2.39 — Banco OBMEP 2006. A sexta parte dos alunos de uma classe usam óculos. Dentre os que usam óculos, $\frac{1}{3}$ são meninas. Além disso, 4 meninos usam óculos. Quantos são os alunos dessa classe?

Solução. De acordo com o enunciado, $\frac{1}{6}$ dos alunos usam óculos. Desses, $\frac{1}{3}$ são meninas e, portanto, $\frac{2}{3}$ são meninos, o que corresponde a 4 alunos. Observe que $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$ é dado por

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}.$$

De fato, dividindo $\frac{1}{6}$ em três partes iguais, temos $\frac{1}{18}$. Veja o modelo desse cálculo usando barras:



Voltando à resolução do problema, concluímos que $\frac{1}{18}$ do total de alunos equivale a 4 alunos. Logo, o número total de alunos é igual a $18 \times 4 = 72$ alunos. ■

Exercício 2.40 — ENEM 2010. Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição? A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

(a) O jogador I, porque acertou 3/4 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/3 dos chutes.
(b) O jogador I, porque acertou 4/3 dos chutes, enquanto que o jogador II acertou 2/3
(c) O jogador I, porque acertou 3/4 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 3/4 dos chutes.
(d) O jogador I, porque acertou 12/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/3 dos chutes.
(e) O jogador I, porque acertou 9/25 dos chutes, enquanto o jogador II acertou 2/5 dos chutes.

Solução. O jogador I acertou 45 dos 60 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{45}{60}$ ou

$$\frac{45 \div 15}{60 \div 15} = \frac{3}{4},$$

enquanto o jogador II acertou 50 dos 75 chutes, ou seja, sua *razão* de acertos é $\frac{50}{75}$ ou

$$\frac{50 \div 25}{75 \div 25} = \frac{2}{3}.$$

Uma vez que

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4},$$

concluímos que o jogador I deve ser o escolhido por ter acertado 3/4 dos seus chutes, ao passo que o jogador II acertou 2/3 dos seus chutes. Portanto, a alternativa (a) é correta.

■

Exercício 2.41 — ENEM 2014. Um clube de futebol abriu inscrições para novos jogadores. Inscreveram-se 48 candidatos. Para realizar uma boa seleção, deverão ser escolhidos os que cumpram algumas exigências: os jogadores deverão ter mais de 14 anos, estatura igual ou superior à mínima exigida e bom preparo físico. Entre os candidatos, 7/8 têm mais de 14 anos e foram pré-selecionados. Dos pré-selecionados, 1/2 têm estatura igual ou superior a mínima exigida e, destes, 2/3 têm bom preparo físico.

A quantidade de candidatos selecionados pelo clube de futebol foi

(a) 12. (b) 14. (c) 16. (d) 32. (e) 42.

Exercício 2.42 — OBMEP 2019. Janaína tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

(a) Ela ficará preenchida em 7/8 de sua capacidade.
(b) Ela ficará preenchida em 8/13 de sua capacidade.
(c) Ela ficará preenchida em 5/8 de sua capacidade.
(d) Ela ficará totalmente cheia, sem transbordar.
(e) Ela vai transbordar.

Solução. Pelo enunciado, a capacidade da caneca pequena equivale a $\frac{3}{5}$ da capacidade da caneca média e esta, por sua vez, equivale a $\frac{5}{8}$ da capacidade da caneca grande. Assim, 1 caneca pequena teria capacidade igual a de

$$\begin{aligned}
\frac{3}{5}\times 1 \text{ “caneca média”} &= \frac{3}{5}\times\frac{5}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\
&= \frac{3}{5}\times 5\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\
&= 3\times\frac{1}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\
&= \frac{3}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}.
\end{aligned}$$

Portanto, 1 caneca pequena e 1 caneca média, juntas, têm capacidade equivalente a de

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)\times 1 \text{ “caneca grande”} &= \frac{8}{8}\times 1 \text{ “caneca grande”}\\ &= 1 \text{ “caneca grande”}.\end{aligned}$$

Portanto, (d) é a alternativa correta.

■

Exercício 2.43 — ENEM 2016. Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão).

- Marca A: 2 g de fibras a cada 50 g de pão;
- Marca B: 5 g de fibras a cada 40 g de pão;
- Marca C: 5 g de fibras a cada 100 g de pão;
- Marca D: 6 g de fibras a cada 90 g de pão;
- Marca E: 7 g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é

(a) A (b) B (c) C (d) D (e) E

Solução. *Concentração* de fibras significa a fração a quantidade de fibras em gramas **por** quantidade de pão em gramas, isto é, a **fração** ou **razão**

$$\frac{\text{“quantidades de gramas de fibras”}}{\text{“quantidade de gramas de pão”}}.$$

Para as marcas A, B, C, D e E, respectivamente, essas concentrações são iguais a

$$\frac{2}{50} \qquad \frac{5}{40} \qquad \frac{5}{100} \qquad \frac{6}{90} \qquad \frac{7}{70}$$

Note que $\frac{5}{100} < \frac{5}{40}$, pois temos mesmos numeradores e denominador menor na maior fração. Logo, a resposta não pode ser a marca C. Observe também que:

$$\frac{6}{90} = \frac{6\div 3}{90\div 3} = \frac{2}{30} > \frac{2}{50}.$$

Portanto, a marca A também não é a de maior concentração de fibras. Agora, as frações das marcas B e E são equivalentes, respectivamente, a

$$\frac{5\div 5}{40\div 5} = \frac{1}{8} \qquad \text{e} \qquad \frac{7\div 7}{70\div 7} = \frac{1}{10}.$$

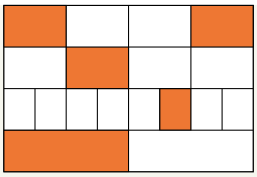
Como $\frac{1}{10} < \frac{1}{8}$, concluímos que a marca E não é a resposta. Resta, assim, compararmos as concentrações de fibras das marcas B e D, ou seja, as frações $\frac{1}{8}$ e $\frac{2}{30}$, respectivamente. Temos

$$\frac{2}{30} = \frac{1}{15} < \frac{1}{8}.$$

Logo, concluímos que a marca B é a que tem maior concentração de fibras.

■

Exercício 2.44 Uma bandeira está dividida em 4 faixas horizontais de igual largura e cada faixa está dividida em duas, quatro ou oito partes iguais, conforme indicado na figura abaixo. Qual é a fração correspondente à área pintada de amarelo?



Sequência 4

Exercício 2.45 — Canguru 2020 - Prova S. Se C cachorros pesam Q quilogramas e E elefantes pesam o mesmo que M cachorros, quantos quilogramas pesa um elefante?

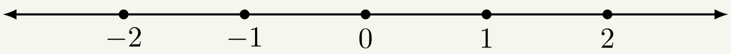
(a) $\frac{E\times M}{C\times Q}$. (b) $\frac{C\times Q}{E\times M}$. (c) $\frac{Q\times E}{C\times M}$. (d) $\frac{Q\times M}{C\times E}$. (e) $\frac{C\times M}{Q\times E}$.

Solução. Se C cachorros pesam Q quilogramas, 1 cachorro pesa $\frac{Q}{C}$ quilogramas e M cachorros pesam $M\times\frac{Q}{C}$ quilogramas. Como este é o peso de E elefantes, um elefante pesa

$$\frac{1}{E}\times M\times\frac{Q}{C} = \frac{Q\times M}{C\times E},$$

o que corresponde à alternativa (d). ■

Exercício 2.46 Localize (aproximadamente) os pontos $P = -\frac{7}{3}$, $Q = \frac{5}{4}$, $R = -\frac{6}{5}$ e $S = \frac{5}{2}$ na reta numérica desenhada abaixo.

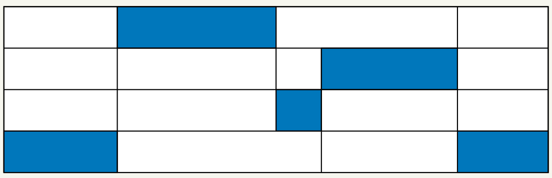


Exercício 2.47 — OCM 1990. Qual das frações é maior $\frac{2753}{2235}$ ou $\frac{2743}{2225}$? Justifique (sem efetuar divisões).

Exercício 2.48 Uma lata cheia de tinta pesa 13 kg. Se retirarmos metade da tinta contida na lata, ela passará a pesar 8 kg. Qual é o peso da lata vazia?

(a) 5 quilogramas.
(b) 10 quilogramas.
(c) 2 quilogramas.
(d) 3 quilogramas.
(e) 21 quilogramas.

Exercício 2.49 — Banco OBMEP - adaptada. A figura mostra um retângulo maior dividido em 18 retângulos menores, com diferentes tamanhos e todos com a mesma largura. Que fração do retângulo maior representa a parte pintada de azul?



Exercício 2.50 — Canguru 2020 - Prova S. Qual é o valor de

$$\frac{1010^2 + 2020^2 + 3030^2}{2020}$$

(a) 2020 (b) 3030 (c) 4040 (d) 6060 (e) 7070

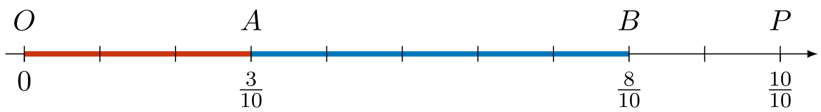
3 Operações com Frações

3.1 – Adição e subtração

Iniciamos o nosso roteiro com um problema simples cuja solução se resume a uma adição de frações.

Problema 2 Fernando percorreu $\frac{3}{10}$ do percurso total previsto para uma viagem de automóvel na primeira hora. Na segunda hora, ele percorreu mais $\frac{5}{10}$ do percurso. Qual a fração do percurso total que foi percorrida nas duas primeiras horas de viagem?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o percurso total previsto para a viagem. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, portanto, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do percurso. O segmento OA corresponde ao trecho que foi percorrido na primeira hora da viagem e o segmento AB corresponde ao trecho percorrido na segunda hora. Assim, o segmento OB corresponde ao que foi percorrido nas duas primeiras horas.



Assim, temos

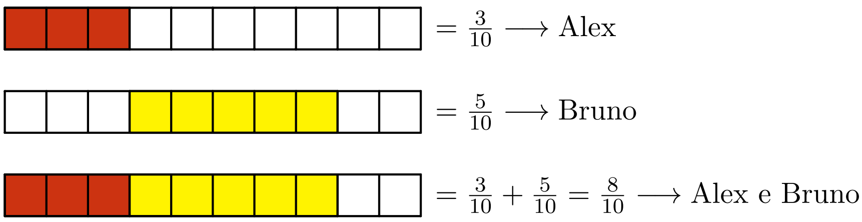
$$\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{8}{10},$$

ou seja, foram percorridos $\frac{8}{10}$ do percurso total nas duas primeiras horas da viagem. ■

Outro modo de interpretar a adição $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}$ é o seguinte.

Exercício 3.1 Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex comeu $\frac{3}{10}$ da barra e Bruno comeu $\frac{5}{10}$ da barra. Que fração da barra os dois comeram juntos?

Solução. Observe a figura, onde estão representadas a barra, dividida em 10 partes iguais, e as frações comidas pelos irmãos.



Na barra de cima, estão pintadas 3 das 10 partes, representando os $\frac{3}{10}$ da barra comidos por Alex. Na barra do meio, estão pintadas 5 das 10 partes, representando os $\frac{5}{10}$ da barra comidos por Bruno. Na barra de baixo, juntamos as partes comidas por Alex e Bruno, totalizando 8 das 10 partes da barra. Portanto,

$$\frac{3}{10}+\frac{5}{10}=\frac{3+5}{10}=\frac{8}{10},$$

ou seja, Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{8}{10}$ da barra de chocolate. ■

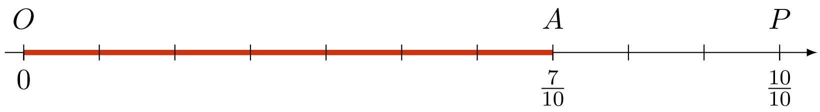
De modo geral, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

Adição de frações com um mesmo denominador: a soma de duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a soma dos numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

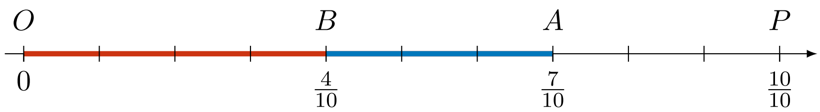
Agora, considere o problema

Problema 3 Nando percorreu $\frac{7}{10}$ do trajeto da sua casa até a escola, quando percebeu que tinha esquecido o livro de matemática em casa. Voltou $\frac{3}{10}$ desse mesmo trajeto, quando encontrou com o seu pai, que já tinha percebido o esquecimento e resolveu ir até a escola entregar o livro ao filho. Que fração do trajeto da casa de Nando até a escola o pai já tinha percorrido, quando os dois se encontraram?

Solução. Na reta numérica abaixo, o segmento OP representa o trajeto completo da casa de Nando até a escola. Esse segmento foi dividido em 10 partes iguais, logo, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{10}$ do trajeto. O ponto A representa o ponto onde Nando notou que tinha esquecido o livro, ou seja, o segmento OA corresponde ao trecho que Nando percorreu até o ponto onde percebeu o esquecimento do livro, que corresponde $\frac{7}{10}$ do trajeto de sua casa à escola.



O ponto B representa o ponto de encontro de Nando com o seu pai, ou seja, o segmento AB corresponde ao trecho que Nando percorreu de volta: $\frac{3}{10}$ do percurso total, desde o ponto onde notou o esquecimento, até o encontro com o seu pai.



Assim,

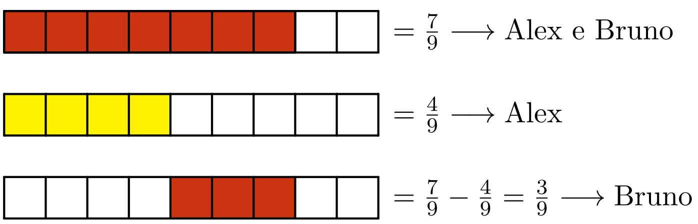
$$\frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5},$$

ou seja, o encontro entre Nando e seu pai aconteceu quando o pai tinha percorrido $\frac{2}{5}$ do trajeto de casa até a escola. ■

Veja também o seguinte exercício.

Exercício 3.2 Os irmãos Alex e Bruno ganharam uma barra de chocolate de seu pai. Alex e Bruno comeram, juntos, $\frac{7}{9}$ da barra. Se $\frac{4}{9}$ é a fração da barra comida por Alex, que fração corresponde à parte comida por Bruno?

Solução. Observe a figura abaixo, onde estão representadas a barra dividida em 9 partes iguais, a fração comida em conjunto pelos dois irmãos e a fração comida por Alex.



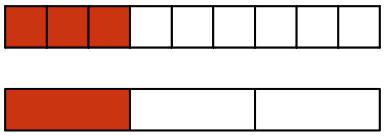
Na barra de cima, estão pintadas 7 das 9 partes, representado os $\frac{7}{9}$ da barra que foram comidos pelos dois irmãos juntos. Na barra do meio, estão pintadas 4 das 9 partes, representando os $\frac{4}{9}$ da barra comidos por Alex (sozinho). Na barra de baixo, subtraímos a parte comida por Alex (sozinho), da parte comida pelos dois irmãos juntos, mostrando que Bruno comeu 3 das 9 partes. Desse modo,

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{7-4}{9} = \frac{3}{9}.$$

Podemos, ainda, simplificar a fração $\frac{3}{9}$, dividindo numerador e denominador por 3:

$$\frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}.$$

Assim, Bruno comeu, sozinho, $\frac{1}{3}$ da barra. A próxima figura traz uma representação geométrica para a simplificação acima. Antes de prosseguir, certifique-se de que você a entendeu (lembre da equivalência de frações, que estudamos na seção 2.1).



$= \frac{3}{9}$

$= \frac{1}{3}$

■

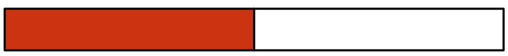
De modo análogo ao que foi feito no caso da adição, quando as frações têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

Subtração de frações com um mesmo denominador: a diferença entre duas frações que têm um mesmo denominador é a fração cujo numerador é a diferença entre os numeradores das duas frações e cujo denominador é o denominador comum das duas frações.

Os próximos exercícios trazem situações de adição e subtração de frações que *não possuem um mesmo denominador*.

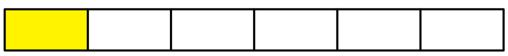
Exercício 3.3 Paulo contratou João para pintar o muro de sua propriedade. João pintou $\frac{1}{2}$ do muro no primeiro dia de trabalho. No segundo dia, como teve de sair mais cedo para levar seu filho ao médico, João pintou apenas $\frac{1}{6}$ do muro. Que fração do muro João pintou nos dois primeiros dias de trabalho?

Solução. Representando o muro por uma barra, dividindo essa barra em 2 partes iguais e tomando 1 delas, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{2}$, que é exatamente a porção do muro que foi pintada no primeiro dia de trabalho.



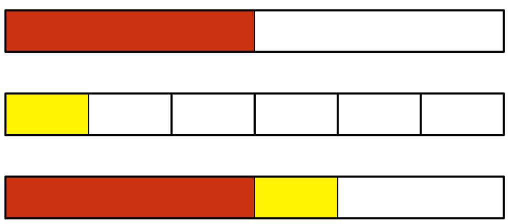
$= \frac{1}{2}$

Dividindo essa mesma barra em 6 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obtemos uma representação da fração $\frac{1}{6}$, exatamente a parte do muro pintada no segundo dia.



$= \frac{1}{6}$

Agora, precisamos calcular a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ para obter a fração do muro pintada nos dois primeiros dias.

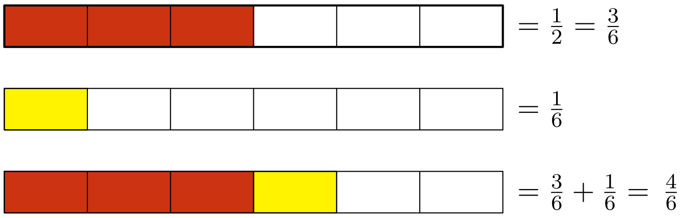


$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = ?$

Como essas frações não têm um mesmo denominador, a ideia é encontrar **frações equivalentes** a cada uma delas, as quais possuam um mesmo denominador, como fizemos na seção 2.1. Depois, soma-se as frações equivalentes e simplifica-se o resultado. Para isso, vamos dividir cada metade da barra de cima, representando a fração $\frac{1}{2}$, em 3 partes iguais. Assim, de acordo com a próxima figura, a barra ficará dividida em 6 partes. A parte destacada maior corresponde a três dessas partes, ou seja, pode ser representada pela fração $\frac{3}{6}$.



Portanto,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3},$$

ou seja, João pintou $\frac{2}{3}$ do muro nos dois primeiros dias.

■

Um erro muito comum que é cometido quando os alunos tentam somar duas frações é o de somar os seus numeradores e denominadores. Por exemplo, eles calculam a soma $\frac{5}{12} + \frac{4}{9}$ do seguinte modo:

$$\frac{5}{12} + \frac{4}{9} = \frac{5+4}{12+9} = \frac{9}{21}.$$

Talvez os alunos cometam esse erro porque seguem uma *analogia*, julgando que a operação de adição deve ser efetuada duas vezes, uma para cada par de números. Quando estudam a multiplicação de frações, as dúvidas podem tornar-se mais agudas, pois, para multiplicar duas frações, multiplicamos seus numeradores e denominadores! É muito importante que os alunos entendam que esse procedimento é *incorreto*. Para isso, é preciso reforçar e tornar natural a necessidade da equivalência de frações para termos "medidas em uma escala comum", como fizemos no exemplo acima. Contra-exemplos bastante drásticos ajudam também como em

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

pois, se a igualdade ocorresse, duas metades dariam uma metade! Erros dessa natureza respondem por dificuldades conceituais e técnicas dos alunos em toda a sua trajetória acadêmica, muitas vezes.

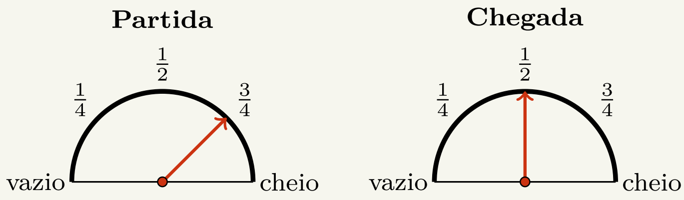
Em geral, quando duas frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para somá-las.

Adição de frações com denominadores distintos: para somar duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, somamos essas frações, aplicando a regra de soma de fração com o mesmo denominador. Por exemplo,

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}.$$

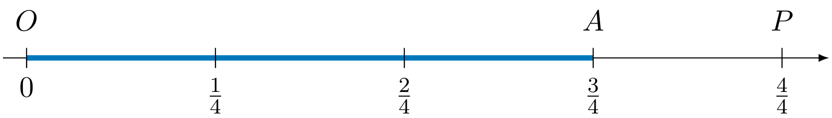
Observação 3.1 Aqui, vale uma revisão sobre como encontrar as duas frações equivalentes às frações dadas. Veja que a dificuldade é achar um denominador para essas frações. Para isso, observamos que esse denominador deve ser um múltiplo dos denominadores das duas frações originais: 4 e 6, no exemplo acima. Então, precisamos achar um número que seja múltiplo de 4 e 6 ao mesmo tempo. Uma possibilidade totalmente válida seria tomar, como denominador, o número $4 \times 6 = 24$; isso daria as frações $\frac{18}{24}$, equivalente a $\frac{3}{4}$, e $\frac{4}{24}$, equivalente a $\frac{1}{6}$. No entanto, a possibilidade 12 é mais econômica, exatamente porque 12 é o *mínimo múltiplo comum* de 4 e 6.

Exercício 3.4 — CMF - adaptada. No painel de um automóvel há um marcador que indica a quantidade de combustível no tanque. Através de um ponteiro, o marcador indica a fração de combustível existente no tanque em relação à capacidade máxima. Quando o ponteiro aponta para a posição *cheio*, isso significa que o tanque está completamente cheio de combustível. As figuras abaixo representam o marcador de combustível no momento da partida e no momento da chegada de uma viagem.

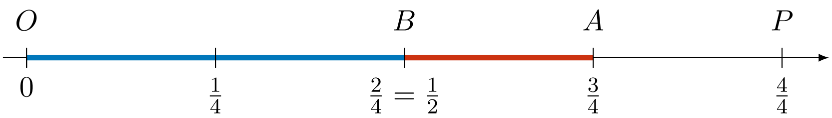


Que fração do tanque de combustível foi utilizada na viagem?

Solução. Veja que, no momento da partida, o tanque estava com $\frac{3}{4}$ da sua capacidade e, na chegada, estava com $\frac{1}{2}$ da sua capacidade. Assim, a fração que representa o total de gasolina gasto na viagem é dada pela diferença $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$. O segmento OP na reta numérica abaixo representa o tanque cheio de combustível. Dividindo esse segmento em 4 segmentos iguais, cada um desses segmentos corresponde a $\frac{1}{4}$ do tanque. Logo, o segmento OA corresponde a $\frac{3}{4}$, fração do tanque que estava ocupada por combustível no momento da partida.



Agora, veja que $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Assim, marcamos o ponto B, em que OB corresponde à fração do tanque ocupada por combustível no momento da chegada.



Portanto,

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Logo, $\frac{1}{4}$ é a fração do tanque de combustível utilizada na viagem. ■

Mais uma vez, de modo análogo ao que foi feito para a adição, quando as frações não têm um mesmo denominador, procedemos do seguinte modo para subtraí-las.

Subtração de frações com denominadores distintos: para calcular a diferença entre duas frações com denominadores distintos, começamos encontrando duas frações que tenham um mesmo denominador e sejam equivalentes às frações dadas; em seguida, calculamos a diferença entre essas frações. Por exemplo,

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{16}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{20}.$$

A ideia geral para encontrar frações equivalentes às dadas e com um mesmo denominador é a mesma que observamos no caso da adição: começamos procurando um denominador que seja múltiplo dos dois denominadores das frações iniciais: por exemplo, seu MMC.

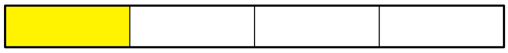
Exercício 3.5 A professora Juliana presenteou as alunas Bruna e Bia, medalhistas em uma olimpíada de Matemática, com uma caixa cheia de livros. Elas decidiram que Bruna, por ter conquistado uma medalha de ouro, ficaria com um terço dos livros; e Bia, por ter conquistado uma medalha de prata, ficaria com um quarto dos livros. Além disso, o restante dos livros seria doado à biblioteca da escola.

(a) Que fração representa a quantidade de livros que Bruna e Bia receberam juntas?
(b) Que fração representa a quantidade de livros que foram doados à biblioteca?

Solução. Vamos representar o total de livros contidos na caixa por uma barra. Dividindo essa barra em 3 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obteremos uma representação da fração $\frac{1}{3}$, parte dos livros que coube à Bruna.

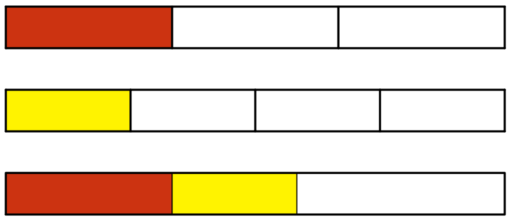
$= \frac{1}{3}$

Dividindo a mesma barra em 4 partes iguais e tomando 1 dessas partes, obteremos uma representação da fração $\frac{1}{4}$, parte dos livros que coube à Bia.



$= \frac{1}{4}$

Para responder o item (a), devemos somar as frações correspondentes às quantidades de livros recebidos pelas duas colegas. Observe a figura abaixo, onde estão representadas as frações da caixa de livros recebidas por Bruna e Bia, separadamente, bem como a fração que representa o total de livros recebidos pelas duas juntas. Não fica claro quanto vale a soma.

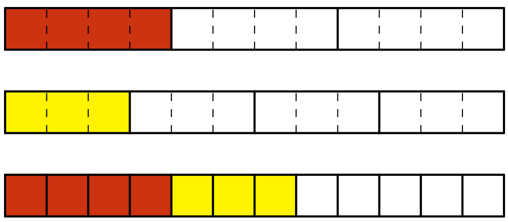


$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ?$

Uma vez que as barras, representando a caixa de livros, não foram divididas em quantidades iguais de partes nas duas figuras, não podemos somar as frações diretamente. Entretanto, como $\text{MMC}(3, 4) = 12$, podemos subdividir as barras de modo que cada uma passe a ter 12 pedaços iguais. Para isso, podemos subdividir cada uma das 3 partes da primeira barra em 4 pedaços iguais; e cada uma das 4 partes da segunda barra em 3 pedaços iguais, conforme a próxima representação.



$= \frac{1}{3} = \frac{4}{12}$

$= \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$

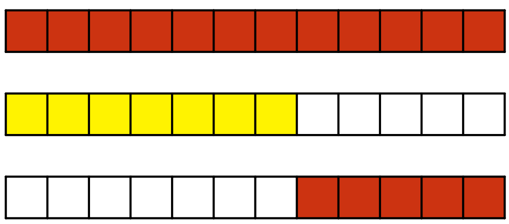
$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Assim, obtemos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$ equivalentes, respectivamente, às frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, dadas no enunciado. Então, para somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, somamos as frações $\frac{4}{12}$ e $\frac{3}{12}$:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12}.$$

Assim, a fração que corresponde à quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, juntas, é $\frac{7}{12}$: a resposta para o item (a).

Finalmente, para descobrir a fração da caixa que representa os livros doados à biblioteca, devemos subtrair $\frac{7}{12}$, que é a quantidade de livros recebidos por Bruna e Bia, de 1, que representa a barra cheia.



$= 1 = \frac{12}{12}$

$= \frac{7}{12}$

$= \frac{12}{12} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$

Observe que, na barra de cima temos uma primeira fração que representa o total de livros na caixa, na barra do meio temos uma segunda fração que representa a quantidade de livros recebidos pelas duas alunas e, na barra de baixo, temos uma terceira fração que dá a diferença entre a primeira e a segunda, ou seja, temos a fração

$$1-\frac{7}{12}=\frac{12}{12}-\frac{7}{12}=\frac{12-7}{12}=\frac{5}{12}.$$

Portanto, a fração que representa os livros que foram doados à biblioteca é $\frac{5}{12}$: a resposta para o item (b). ■

Observação 3.2 Conforme observamos anteriormente, podemos somar as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, executando os seguintes passos.

(a) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{3}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{3}=\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{4}{12}.$$

(b) Encontramos uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$, multiplicando numerador e denominador pelo denominador da fração $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{4}=\frac{1\times 3}{4\times 3}=\frac{3}{12}.$$

(c) Somamos as frações encontradas, que agora possuem um mesmo denominador:

$$\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4+3}{12}=\frac{7}{12}.$$

Agora, tomando como exemplo a soma

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}$$

e procedendo de maneira semelhante, temos

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 8}{6\times 8}+\frac{3\times 6}{8\times 6}=\frac{8}{48}+\frac{18}{48}=\frac{8+18}{48}=\frac{26}{48}.$$

Por outro lado, observando que

$$\mathrm{MMC}(6,8)=24,\ \ 24\div 6=4\ \ \text{e}\ \ 24\div 8=3,$$

vemos que também é possível encontrar frações equivalentes a $\frac{1}{6}$ e a $\frac{3}{8}$, com um mesmo denominador, multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração por 4 e o numerador e o denominador da segunda, por 3. Assim fazendo, temos:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=\frac{1\times 4}{24}+\frac{3\times 3}{24}=\frac{4}{24}+\frac{9}{24}=\frac{13}{24}.$$

Conforme já observamos, a diferença entre os dois métodos anteriormente descritos é que, em muitos casos, utilizando o MMC dos denominadores das frações originais, a fração obtida para a soma é uma forma simplificada daquela que seria obtida utilizando o produto dos denominadores.

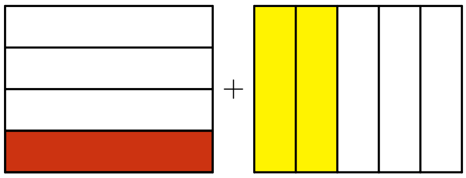
Exercício 3.6 Em um passeio ciclístico, os participantes percorreram $\frac{1}{4}$ do percurso na primeira hora, $\frac{2}{5}$ do percurso na segunda hora e 14 quilômetros na terceira e última hora de passeio. Quantos quilômetros tem o percurso total do passeio?

(a) 14 (b) 16 (c) 40 (d) 36

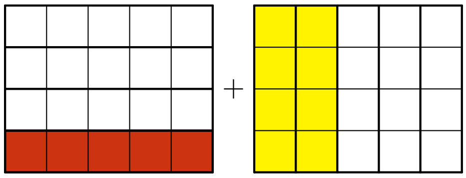
Solução. A ideia para resolver o problema é calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora de passeio. Isso porque já sabemos o valor, 14 quilômetros, da distância percorrida durante a terceira hora. Como veremos, esses dados, em conjunto, nos permitirão calcular o total do percurso.

Para calcular a fração correspondente à distância percorrida durante a terceira hora, devemos somar as frações correspondentes ao total percorrido na primeira e segunda horas e, em seguida, subtrair o resultado de 1, que corresponde ao percurso total do passeio.

Para somar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, vamos proceder, como antes, encontrando duas frações, uma equivalente à fração $\frac{1}{4}$ e outra equivalente à fração $\frac{2}{5}$, as quais tenham denominadores iguais. Na figura seguinte mostramos uma maneira diferente de visualizar este método.



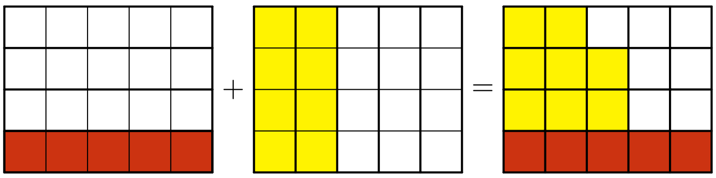
Ainda não há como efetuar diretamente a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$, pois o retângulo, que representa todo o percurso percorrido pelos ciclistas, foi dividido em 4 partes na figura da esquerda e em 5 partes na figura da direita. Entretanto, podemos representar as mesmas frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ subdividindo, cada $\frac{1}{4}$ da figura da esquerda, em 5 partes iguais e, cada $\frac{1}{5}$ da figura da direita, em 4 partes iguais. Note que, na figura a seguir, isso equivale a dividir o retângulo da esquerda em cinco *colunas* iguais e o da direita em quatro *linhas* iguais.



Agora, observe que as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{5}{20}$ são **equivalentes**, bem como as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{8}{20}$. Além disso, é fácil somar as frações $\frac{5}{20}$ e $\frac{8}{20}$, pois ambas são frações de um inteiro que foi dividido em uma mesma quantidade de partes: $(5\times4 = 4\times5 = 20$ partes). Assim,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20},$$

fração representada na última figura abaixo.

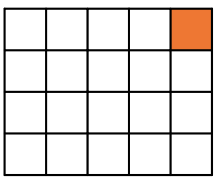


Observemos, agora, que resta a fração $1-\frac{13}{20}$ para completar o percurso, com

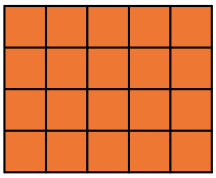
$$1-\frac{13}{20}=\frac{20}{20}-\frac{13}{20}=\frac{7}{20},$$

sendo essa fração a parte não pintada do lado direito da igualdade da figura anterior. De fato, o percurso completo foi dividido em 20 quadradinhos dos quais 7 não foram marcados.

Por fim, lembre-se que essa fração, $\frac{7}{20}$, corresponde aos 14 quilômetros percorridos na terceira hora de passeio. Portanto, a fração $\frac{1}{20}$, correspondente ao quadrado menor pintado na figura seguinte, equivale a $14\div7=2$ quilômetros.

 $=\frac{1}{20} \longleftrightarrow 14\div7=2$ quilômetros

Logo, o percurso total, que tem 20 quadrados, corresponde a $20\times2=40$ quilômetros, conforme a sua ilustração na próxima figura. ■

 $= \frac{20}{20} \longleftrightarrow 20{\times}2 = 40$ quilômetros

Observação 3.3 Resumidamente, a soma das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{5}$ foi calculada do seguinte modo.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1\times 5}{4\times 5}+\frac{2\times 4}{5\times 4}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}.$$

3.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Sequência 1

Exercício 3.7 Represente geometricamente as operações com frações listadas abaixo utilizando setores circulares (“pizzas”) ou barras.

(a) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$.

(b) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$.

(c) $\frac{3}{10}+\frac{4}{10}$.

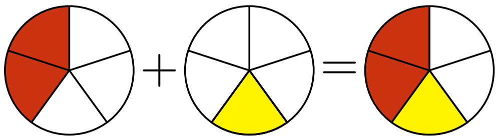
(d) $\frac{4}{7}-\frac{1}{7}$.

(e) $\frac{5}{5}-\frac{2}{5}$.

(f) $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}$.

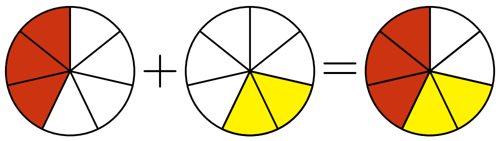
Solução. As figuras abaixo mostram as representações geométricas das operações utilizando “pizzas”.

(a)



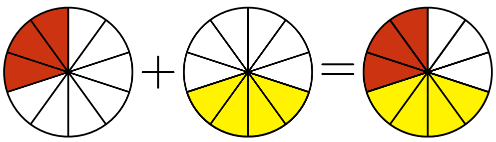
$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{5}$

(b)



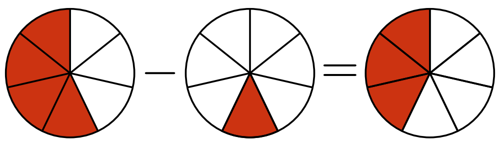
$\frac{3}{7}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{7}$

(c)



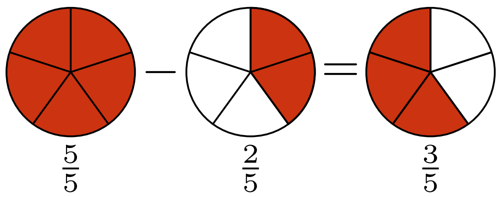
$\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{7}{10}$

(d)

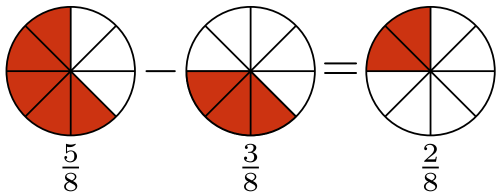


$\frac{4}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{3}{7}$

(e)

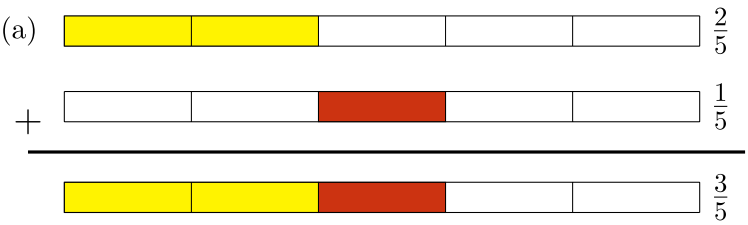


(e)

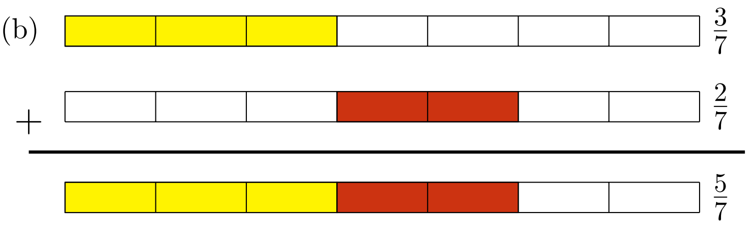


Já as representações utilizando barras são mostradas nas próximas figuras.

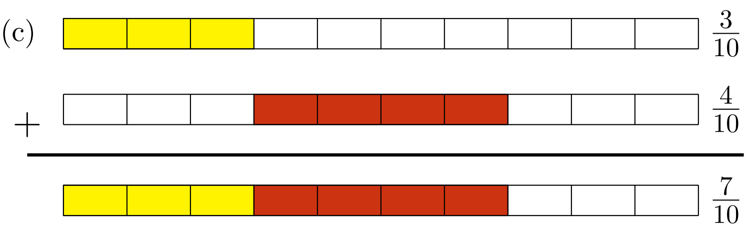
(a)



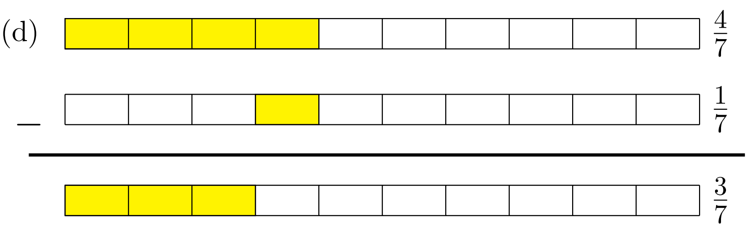
(b)



(c)

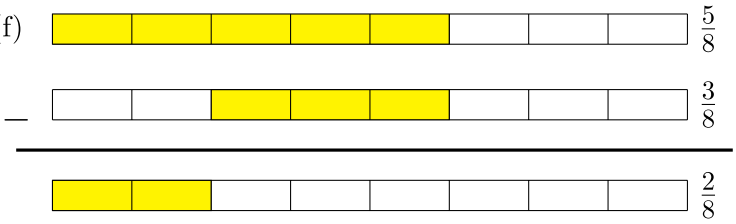


(d)



(e)

(f)



■

Exercício 3.8 Numa pizzaria, Gabriel comeu $\frac{5}{8}$ de uma pizza e Nando comeu $\frac{2}{8}$ da mesma pizza.

(a) Que fração da pizza os dois comeram juntos?
(b) Quem comeu mais pizza, João ou Carlos?
(c) Que fração de pizza um deles comeu a mais que o outro?

Solução. (a) A fração da pizza que os dois comeram juntos é igual à soma das frações que cada um deles comeu, ou seja,

$$\frac{5}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5+2}{8}=\frac{7}{8}.$$

(b) Para determinar quem comeu mais pizza, devemos verificar qual das frações $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{8}$ é a maior. Como as duas têm o mesmo denominador, a maior é $\frac{5}{8}$, pois é a que possui o maior numerador. Assim,

$$\frac{5}{8}>\frac{2}{8},$$

ou seja, Gabriel comeu mais pizza que Nando.

(c) A fração da pizza que Gabriel comeu a mais que Nando é igual à diferença entre $\frac{5}{8}$, fração comida por Gabriel, e $\frac{2}{8}$, fração comida por Nando, ou seja,

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}.$$

■

Exercício 3.9 João encheu o tanque do seu carro. Gastou $\frac{2}{5}$ do tanque para ir de casa ao trabalho durante a semana e $\frac{1}{5}$ do tanque para passear no final de semana. Que fração do tanque restou?

Exercício 3.10 Utilizando tinta de cor azul, Adamastor pintou $\frac{2}{10}$ da área de um muro, inicialmente pintado na cor branca, no primeiro dia de trabalho; $\frac{3}{10}$ da área do muro no segundo dia e $\frac{4}{10}$ no terceiro dia. No quarto dia, Adamastor percebeu uma diferença na tonalidade da tinta que foi utilizada e teve de repintar de branco $\frac{1}{10}$ da área do muro, relativa à parte que ficou pintada de cor diferente. Que fração do muro ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho?

(a) $\frac{2}{5}$. (b) $\frac{1}{2}$. (c) $\frac{7}{10}$. (d) $\frac{4}{5}$. (e) $\frac{9}{10}$.

Solução. Devemos somar as frações das áreas do muro pintadas, de azul, nos três primeiros dias e subtrair, do resultado, a fração do muro que foi pintada de branco no quarto dia. Portanto, a fração do muro que ficou pintada de azul após o quarto dia de trabalho é

$$\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}-\frac{1}{10}=\frac{2+3+4-1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.11 Mariana está lendo um livro de romance que tem 150 páginas. Ontem ela leu 59 e hoje ela leu 25 das páginas desse livro.

(a) Que fração das páginas do livro Mariana já leu?
(b) Que fração representa as páginas que Mariana ainda não leu?

Solução. (a) Ontem Mariana leu $\frac{59}{150}$ e hoje $\frac{25}{150}$ das páginas do livro. Logo, a fração do livro que Mariana já leu é

$$\frac{59}{150}+\frac{25}{150}=\frac{59+25}{150}=\frac{84}{150}=\frac{84\div 6}{150\div 6}=\frac{14}{25}.$$

(b) Por outro lado, a fração do livro que Mariana ainda não leu é igual a

$$\frac{25}{25}-\frac{14}{25}=\frac{11}{25}.$$

■

Exercício 3.12 Gabi foi às compras e gastou $\frac{1}{3}$ do dinheiro que possuía, restando-lhe, ainda, R$ 240,00. Quanto Gabi possuía antes de ir às compras?

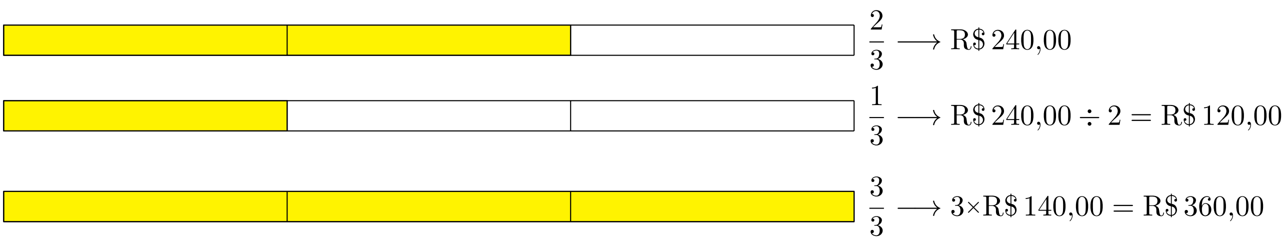
(a) R$ 80,00. (b) R$ 120,00. (c) R$ 240,00. (d) R$ 360,00. (e) R$ 480,00.

Solução. Como Gabi gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha com as compras, a fração do dinheiro que lhe restou foi $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Representamos na reta numérica abaixo a fração $\frac{2}{3}$, que corresponde aos R$ 240,00 que restaram.

Na próxima reta numérica, podemos observar a representação geométrica de $\frac{1}{3}$, que correspode a R$ 240,00 $\div$ 2 = R$ 120,00.

Finalmente, na reta numérica logo abaixo, podemos observar a representação geométrica de $\frac{3}{3}$, que correspode a 3×R$ 120,00 = R$ 360,00.

Logo, Gabi tinha R$ 360,00 antes de fazer as compras, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(d)**. Uma representação geométrica alternativa para as frações envolvidas nesse problema é a seguinte.



■

Exercício 3.13 — Canguru. Numa classe, os alunos nadam somente ou dançam somente ou fazem as duas coisas. Três quintos dos alunos da classe nadam e três quintos dançam. Há exatamente cinco alunos que fazem as duas coisas, isto é, nadam e dançam. Quantos alunos há na classe?

(a) 15. (b) 20. (c) 25. (d) 30. (e) 35.

Solução. Somando as frações que representam os alunos que nadam e os alunos que dançam, obtemos:

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}.$$

Note que a fração $\frac{6}{5}$ é maior que a fração $\frac{5}{5}$, que representa o total de alunos na classe. De fato, a diferença $\frac{6}{5}-\frac{5}{5}>0$ ocorre porque a fração que corresponde aos alunos que praticam as duas atividades foi somada duas vezes, tanto na fração dos alunos que nadam quanto na fração dos alunos que dançam. Assim, essa diferença corresponde aos alunos que praticam as duas atividades. Logo,

$$\frac{1}{5}\longrightarrow 5 \text{ alunos.}$$

$$\frac{5}{5}\longrightarrow 5\times 5=25 \text{ alunos.}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Sequência 2

Exercício 3.14 Encontre os resultados das operações com frações listadas abaixo.

(a) $\frac{7}{5}+\frac{2}{3}$.
(b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$.
(c) $\frac{4}{8}+\frac{2}{3}$.
(d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$.
(e) $\frac{3}{7}-\frac{1}{6}$.
(f) $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$.
(g) $\frac{7}{5}-\frac{2}{3}$.
(h) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$.

Solução. Encontrando frações equivalentes às frações que compõem as somas e que tenham um mesmo denominador, obtemos

(a) $\frac{7}{5}+\frac{2}{3}=\frac{7\times 3}{5\times 3}+\frac{2\times 5}{3\times 5}=\frac{21}{15}+\frac{10}{15}=\frac{21+10}{15}=\frac{31}{15}$.

(b) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{3\times 3}{4\times 3}+\frac{5\times 2}{6\times 2}=\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{9+10}{12}=\frac{19}{12}$.

(c) $\frac{4}{8}+\frac{2}{3}=\frac{4\times 3}{8\times 3}+\frac{2\times 8}{3\times 8}=\frac{12}{24}+\frac{16}{24}=\frac{12+16}{24}=\frac{28}{24}=\frac{28\div 4}{24\div 4}=\frac{7}{6}$.

(d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}=\frac{1\times 4}{2\times 4}+\frac{3\times 2}{4\times 2}+\frac{5}{8}=\frac{4}{8}+\frac{6}{8}+\frac{5}{8}=\frac{4+6+5}{8}=\frac{15}{8}$.

(e) $\frac{3}{7}-\frac{1}{6}=\frac{3\times 6}{7\times 6}-\frac{1\times 7}{6\times 7}=\frac{18}{42}-\frac{7}{42}=\frac{18-7}{42}=\frac{11}{42}$.

(f) $\frac{1}{8}-\frac{1}{9}=\frac{1\times 9}{8\times 9}-\frac{1\times 8}{9\times 8}=\frac{9}{72}-\frac{8}{72}=\frac{1}{72}$.

(g) $\frac{7}{5}-\frac{4}{3}=\frac{7\times 3}{5\times 3}-\frac{4\times 5}{3\times 5}=\frac{21}{15}-\frac{20}{15}=\frac{21-20}{15}=\frac{1}{15}$.

(h) $\frac{3}{5}-\frac{4}{9}=\frac{3\times 9}{5\times 9}-\frac{4\times 5}{9\times 5}=\frac{27}{45}-\frac{20}{45}=\frac{7}{45}$.

■

Exercício 3.15 Se $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{4}{9}$ e $z=\frac{1}{5}$, calcule as seguintes expressões.

(a) $x+y$.
(b) $x-z$.
(c) $y+x-z$.

(d) $x + y + z$.

Solução. Substituindo os valores de x, y e z nas expressões algébricas, obtemos as seguintes expressões numéricas.

(a)

$$x + y = \frac{3}{2} + \frac{4}{9} = \frac{3\times9}{2\times9} + \frac{4\times2}{9\times2} = \frac{27}{18} + \frac{8}{18} = \frac{27+8}{18} = \frac{35}{18}.$$

(b)

$$x - z = \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3\times5}{2\times5} - \frac{1\times2}{5\times2} = \frac{15}{10} - \frac{2}{10} = \frac{15-2}{10} = \frac{13}{10}.$$

(c)

$$\begin{aligned} y + x - z &= \frac{4}{9} + \frac{3}{2} - \frac{1}{5} = \frac{4\times2\times5}{9\times2\times5} + \frac{3\times9\times5}{2\times9\times5} - \frac{1\times9\times2}{5\times9\times2} \\ &= \frac{40}{90} + \frac{135}{90} - \frac{18}{90} = \frac{40+135-18}{90} = \frac{157}{18}. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{3}{2} + \frac{4}{9} + \frac{1}{5} = \frac{3\times9\times5}{2\times9\times5} + \frac{4\times2\times5}{9\times2\times5} + \frac{1\times9\times2}{5\times9\times2} \\ &= \frac{135}{90} + \frac{40}{90} + \frac{18}{90} = \frac{135+40+18}{90} = \frac{193}{18}. \end{aligned}$$

■

Exercício 3.16 Calcule o valor da expressão numérica

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right).$$

Exercício 3.17 — UFMG - adaptado. Paula comprou dois potes de sorvete, ambos com a mesma quantidade do produto. Um dos potes continha quantidades iguais dos sabores chocolate, creme e morango; o outro, quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha. Se o sorvete de chocolate comprado por Paula estivesse em um único pote, a que fração desse pote ele corresponderia?

(a) $\frac{2}{5}$. (b) $\frac{3}{5}$. (c) $\frac{5}{12}$. (d) $\frac{5}{6}$.

Solução. Um dos potes continha quantidades iguais de chocolate, de creme e de morango, logo, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{3}$. O outro pote continha quantidades iguais dos sabores chocolate e baunilha, assim, a fração correspondente à quantidade de chocolate é $\frac{1}{2}$. Como os dois potes continham as mesmas quantidades de sorvete, as frações de chocolate nos dois potes são frações de uma mesma unidade, logo, se todo o sorvete de chocolate estivesse em um único pote, a fração desse pote que ele corresponderia é

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1\times2}{3\times2} + \frac{1\times3}{2\times3} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a letra **(d)**. ■

Exercício 3.18 Três amigas planejavam preencher um álbum de figurinhas da copa. Karla contribuiu com $\frac{1}{6}$, Paula com $\frac{2}{3}$ e Cristina contribuiu com $\frac{1}{8}$ das figurinhas.

(a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, que fração do álbum foi preenchida com as contribuições das três amigas?
(b) Que fração ainda falta preencher para completar o álbum?

Solução. (a) Supondo que não havia figurinhas repetidas, a fração do álbum, que foi preenchida com as contribuições das três amigas, é igual à soma

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{8}=\frac{1\times 4}{6\times 4}+\frac{2\times 8}{3\times 8}+\frac{1\times 3}{8\times 3}=\frac{4}{24}+\frac{16}{24}+\frac{3}{24}=\frac{4+16+3}{24}=\frac{23}{24}.$$

(b) A fração que ainda falta preencher, para completar o álbum, é

$$\frac{24}{24}-\frac{23}{24}=\frac{1}{24}.$$

■

Exercício 3.19 No dia do lançamento de um prédio residencial, $\frac{1}{3}$ dos apartamentos foram vendidos e $\frac{1}{6}$ foram reservados. Que fração corresponde aos apartamentos que não foram vendidos ou reservados?

Exercício 3.20 Maurício fez um suco misto de laranja e acerola. Ele misturou metade de um copo de suco de acerola com $\frac{1}{3}$ do mesmo copo de suco de laranja. Calcule a fração que falta para ter o copo cheio.

(a) $\frac{5}{6}$. (b) $\frac{1}{6}$. (c) $\frac{2}{5}$. (d) $\frac{1}{3}$. (e) $\frac{2}{3}$.

Exercício 3.21 — ENEM. Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares. Do total de lugares, reservou $\frac{2}{5}$ das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, $\frac{3}{8}$ para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele. Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

(a) 27. (b) 40. (c) 45. (d) 74. (e) 81.

Solução. O enunciado diz que $\frac{2}{5}$ das vagas foram reservadas para as pessoas que residem na capital, logo, a quantidade de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{2}{5}\cdot 120=\frac{120}{5}\cdot 2=24\cdot 2=48.$$

Por outro lado, $\frac{3}{8}$ das vagas são reservadas para as pessoas que moram no interior. Desse modo, o total de vagas reservadas para essas pessoas é

$$\frac{3}{8}\cdot 120=\frac{120}{8}\cdot 3=15\cdot 3=45.$$

Como o restante das vagas está reservado para as pessoas que residem fora do estado, essa quantidade é igual a

$$120-(48+45)=120-93=27.$$

Portanto, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Uma solução alternativa para o problema 3.21 consiste em somar as frações referentes às vagas reservadas para pessoas da capital e do interior, $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{8}$, respectivamente; calcular a fração que corresponde às vagas reservadas para pessoas de fora do estado de São Paulo, que é a fração faltante para completar uma unidade; e calcular essa última fração de 120. Com efeito,

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{8}=\frac{2\times 8}{5\times 8}+\frac{3\times 5}{8\times 5}=\frac{16}{40}+\frac{15}{40}=\frac{16+15}{40}=\frac{31}{40};$$

$$\frac{40}{40}-\frac{31}{40}=\frac{9}{40};$$

$$\frac{9}{40}\cdot 120=\frac{120}{40}\cdot 9=3\cdot 9=27.$$

Exercício 3.22 — Unesp. Duas empreiteiras farão conjuntamente a pavimentação de uma estrada, cada uma trabalhando a partir de uma das extremidades. Se uma delas pavimentar 2/5 da estrada e a outra os 81 km restantes, a extensão dessa estrada é de:

(a) 125 km.
(b) 135 km.
(c) 142 km.
(d) 145 km.
(e) 160 km.

Exercício 3.23 — CMRJ. O valor da expressão numérica

$$\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}$$

é

(a) 1. (b) $\frac{63}{64}$. (c) $\frac{31}{32}$. (d) $\frac{15}{16}$. (e) $\frac{7}{8}$.

Solução. Temos:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+1}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{1+\frac{1}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{1+\frac{1}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{1+\frac{1}{63}}=\\
&=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}+\frac{\frac{1}{7}}{\frac{8}{7}}+\frac{\frac{1}{15}}{\frac{16}{15}}+\frac{\frac{1}{31}}{\frac{32}{31}}+\frac{\frac{1}{63}}{\frac{64}{63}}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{4}+\frac{1}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{8}+\frac{1}{\cancel{15}}\cdot\frac{\cancel{15}}{8}+\frac{1}{\cancel{31}}\cdot\frac{\cancel{31}}{8}+\frac{1}{\cancel{63}}\cdot\frac{\cancel{63}}{8}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\\
&=\frac{32+16+8+4+2+1}{64}\\
&=\frac{63}{64}.
\end{aligned}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 3.24 — Banco da OBMEP. Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine trabalham como ambulantes vendendo sanduíches. Diariamente, elas passam na lanchonete do Sr. Manoel e pegam a mesma quantidade de sanduíches para vender. Um certo dia, Sr. Manoel estava doente e deixou um bilhete avisando o motivo pelo qual não estava lá, mas pedindo que cada uma pegasse $\frac{1}{5}$ dos sanduíches. Ana passou primeiro, seguiu as instruções do bilhete e saiu para vender seus sanduíches. Bia, passou em seguida, mas pensou que era a primeira a passar, pegando $\frac{1}{5}$ do que havia e saiu. Cátia, Diana e Elaine chegaram juntas e dividiram igualmente a quantidade que havia, já que Cátia sabia que Ana e Bia haviam passado antes.

a) Que fração do total de sanduíches coube a Bia?
b) Quem ficou com a menor quantidade de sanduíches? Quem ficou com a maior quantidade?
c) Ao final da divisão, nenhuma das vendedoras ficou com mais de 20 sanduíches. Quantos sanduíches o Sr. Manoel deixou para elas?

Solução. a) $\frac{4}{25}$. Como Bia pegou $\frac{1}{5}$ de $\frac{4}{5}$, ela ficou com $\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$ dos sanduíches.

b) Ana pegou $\frac{1}{5}=\frac{5}{25}$ e Cátia, Diana e Elaine dividiram entre as três a fração que restava, que era $1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, ou seja, cada uma pegou $\frac{16}{75}$ dos sanduíches, que é maior que $\frac{12}{75}$ e $\frac{15}{75}$. Sendo assim, Cátia, Diana e Elaine ficaram com a maior parte dos sanduíches e Bia com a menor.

c) 75. A quantidade de sanduíches deve ser um múltiplo comum de 5, 25 e 75, sendo 75 o menor deles. Para 75 sanduíches, as quantidades de Ana, Bia, Cátia, Diana e Elaine são, respectivamente, 15, 12, 16, 16, 16, todas menores que 20, mas para o próximo múltiplo comum de 5, 25 e 75, que é 150, todas ficarão com mais de 20 sanduíches. Sendo assim, essa quantidade deve ser 75.

■

Sequência 3

Exercício 3.25 — Canguru. Partindo da extremidade esquerda de um cano, uma formiguinha andou $\frac{2}{3}$ do seu comprimento. Uma joaninha, que havia partido da extremidade direita do mesmo cano, andou $\frac{3}{4}$ do comprimento deste. Nessa situação, qual fração do comprimento do cano representa a distância entre os dois bichinhos?

(a) $\frac{3}{8}$. (b) $\frac{1}{12}$. (c) $\frac{5}{7}$. (d) $\frac{1}{2}$. (e) $\frac{5}{12}$.

Exercício 3.26 — Canguru. Numa escola, $\frac{2}{3}$ dos alunos gostam de Matemática e $\frac{3}{4}$ dos alunos gostam de Português. Qual é a menor fração que pode representar os alunos que gostam de ambas as matérias?

(a) $\frac{1}{12}$. (b) $\frac{5}{12}$. (c) $\frac{1}{2}$. (d) $\frac{5}{7}$. (e) $\frac{8}{9}$.

Solução. A soma das frações que representam as quantidades de alunos que gostam de Matemática e de Português é

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{8+9}{12}=\frac{17}{12}.$$

Desse modo, pelo menos

$$\frac{17}{12}-\frac{12}{12}=\frac{17-12}{12}=\frac{5}{12}$$

dos alunos gostam de ambas as matérias, pois se r é a fração dos alunos que gostam de ambas as matérias, devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-r\leq 1 &\Longrightarrow \frac{17}{12}-r\leq 1\\ &\Longrightarrow r\geq \frac{17}{12}-\frac{12}{12}\\ &\Longrightarrow r\geq \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

A fração que representa a quantidade de alunos que gostam de ambas as matérias é maior que $\frac{5}{12}$, quando há alunos que não gostam de nenhuma das duas.

■

Exercício 3.27 — CMM - adaptado. Sávio fez uma pesquisa com os moradores de seu condomínio sobre a prática de coleta seletiva de lixo. Ele constatou que $\frac{3}{4}$ dos entrevistados praticam esse tipo de coleta e $\frac{1}{5}$ dos entrevistados sequer sabem o que isso significa. Dessa maneira, a fração que representa a quantidade de pessoas que sabem o que significa a coleta seletiva mas não a praticam é:

(a) $\frac{1}{4}$. (b) $\frac{1}{9}$. (c) $\frac{1}{10}$. (d) $\frac{1}{15}$. (e) $\frac{1}{20}$.

Solução. Uma vez que $\frac{3}{4}$ dos estrevistados praticam a coleta seletiva, a fração que representa a quantidade de entrevistados que não a praticam é

$$\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Agora, dentre os entrevistados que não praticam a coleta seletiva, há os que sabem e os que não sabem o que ela significa. Uma vez que a fração dos que não sabem o que esse tipo de coleta significa é igual a $\frac{1}{5}$, a fração que representa os que sabem o que significa a coleta seletiva, mas não a praticam, é

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1\times5}{4\times5} - \frac{1\times4}{5\times4} = \frac{5}{20} - \frac{4}{20} = \frac{1}{20}.$$

Assim, a alternativa correta é da letra **(e)**. ■

Exercício 3.28 — CMPA. Os animais de um pequeno zoológico se dividem em três classes: mamíferos, aves e répteis. Sabe-se que, do total de animais desse zoológico, $\frac{2}{5}$ são mamíferos, $\frac{3}{8}$ são aves e os 270 animais restantes são répteis. A quantidade total de animais desse zoológico é igual a:

(a) 930. (b) 1200. (c) 1330. (d) 1470. (e) 1540.

Solução. A fração que representa a soma das quantidades de mamíferos e aves é

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2\times8}{5\times8} + \frac{3\times5}{8\times5} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40}.$$

Logo, a fração que representa os animais restantes, ou seja, os répteis, é

$$\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}.$$

Portanto,

$$\frac{9}{40} \longrightarrow 270 \text{ animais}$$

$$\frac{1}{40} \longrightarrow 270 \div 9 = 30 \text{ animais}$$

$$\frac{40}{40} \longrightarrow 40\times30 = 1200 \text{ animais}$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(b)**. ■

Exercício 3.29 — Canguru. Miguel tem cães, vacas, gatos e cangurus no seu sítio. Ao todo são 24 animais, sendo que $\frac{1}{8}$ deles são cães, $\frac{3}{4}$ **não** são vacas e $\frac{2}{3}$ **não** são gatos. Quantos cangurus há no sítio?

(a) 4. (b) 5. (c) 6. (d) 7. (e) 8.

Solução. A quantidade de cães é igual a

$$\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{24}{8} = 3.$$

Como $\frac{3}{4}$ representa a quantidade de animais que não são vacas, a fração que representa a quantidade de vacas é $\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Assim, a quantidade de vacas é igual a

$$\frac{1}{4} \cdot 24 = 6.$$

De modo similar, uma vez que $\frac{2}{3}$ representa a quantidade de animais que não são gatos, a fração que representa a quantidade de gatos é $\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Logo, a quantidade de gatos é igual a

$$\frac{1}{3} \cdot 24 = 8.$$

Portanto, a quantidade de cangurus é igual a

$$24 - (3 + 6 + 8) = 24 - 17 = 7.$$

A alternativa correta é a da letra **(d)**.

Solução alternativa: a quantidade de cães é igual a

$$\frac{1}{8} \cdot 24 = \frac{24}{8} = 3.$$

Já a quantidade de animais que não são vacas, isto é, são cães, gatos ou cangurus, é igual a

$$\frac{3}{4} \cdot 24 = \frac{24}{4} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18.$$

Desse modo, a soma das quantidades de gatos e cangurus é igual a

$$18 - 3 = 15.$$

Por outro lado, a quantidade de animais que não são gatos, ou seja, são cães, vacas ou cangurus, é igual a

$$\frac{2}{3} \cdot 24 = \frac{24}{3} \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16.$$

Logo, a soma das quantidades de vacas e cangurus é igual a

$$16 - 3 = 13.$$

Assim, a soma da quantidade de vacas, com a quantidade de gatos, com o dobro da quantidade de cangurus é igual a

$$15 + 13 = 28.$$

Agora, a soma das quantidades de vacas, de gatos e de cangurus é igual a

$$24 - 3 = 21.$$

Portanto, a quantidade de cangurus é igual a

$$28 - 21 = 7.$$

A alternativa correta é a da letra **(d)**. ■

Exercício 3.30 Certa quantia foi repartida entre três pessoas da seguinte maneira: a primeira recebeu $\frac{2}{3}$ da quantia mais R\$ 5,00; a segunda recebeu $\frac{1}{5}$ da quantia mais R\$ 12,00; e a terceira recebeu o restante, no valor de R\$ 15,00. Qual a quantia que foi repartida?

Solução. Uma vez que R\$ 5,00 + R\$ 12,00 = R\$ 17,00 e

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2\times5}{3\times5} + \frac{1\times3}{5\times3} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{10+3}{15} = \frac{13}{15},$$

as duas primeiras pessoas receberam, juntas, $\frac{13}{15}$ da quantia mais R\$ 17,00. Desse modo, a quantia que coube à terceira pessoa, somada com R\$ 17,00, ou seja, R\$ 17,00 + R\$ 15,00 = R\$ 32,00, corresponde à fração

$$\frac{15}{15} - \frac{13}{15} = \frac{15-13}{15} = \frac{2}{15},$$

extamente o que falta para completar a fração unidade ($1 = \frac{15}{15}$), representando o total da quantia que foi repartida. Portanto, temos:

$$\frac{2}{15} \longrightarrow \text{R\$ 32,00}$$

$$\frac{1}{15} \longrightarrow \text{R\$ 32,00} \div 2 = \text{R\$ 16,00}$$

$$\frac{15}{15} \longrightarrow 15 \times \text{R\$ 16,00} = \text{R\$ 240,00}$$

■

Exercício 3.31 Uma fortuna foi repartida entre três filhos do seguinte modo: uma filha solteira recebeu $\frac{3}{7}$ da herança mais R\$ 8000,00; o filho menor recebeu $\frac{3}{8}$ mais R\$ 5000,00 e a filha casada recebeu os R\$ 42.000,00 restantes. Quanto recebeu o filho menor?

Exercício 3.32 Uma torneira enche um tanque em 6 horas e uma outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Sabendo que o tanque encontra-se vazio, se as duas torneiras forem abertas ao mesmo tempo, em quantas horas elas encherão o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{3}$ do mesmo tanque. Desse modo, se as duas forem abertas ao mesmo tempo, em 1 hora encherão

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

do tanque. Logo, se o tanque estiver vazio e as torneiras forem abertas juntas, o tanque estará completamente cheio em 2 horas. ■

Exercício 3.33 Duas torneiras enchem um tanque em 4 horas. Uma delas, sozinha, enche o tanque em 7 horas. Em quanto tempo a outra torneira, sozinha, encheria o tanque?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{4}$ do tanque e as duas juntas enchem $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Desse modo, em 1 hora, a outra torneira encherá

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1 \times 7}{4 \times 7} - \frac{1 \times 4}{7 \times 4} = \frac{7}{28} - \frac{4}{28} = \frac{7-4}{28} = \frac{3}{28}$$

do tanque. Assim, essa torneira enche $\frac{3}{28}$ do tanque em 60 minutos. Logo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{3}{28} \longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{28} \longrightarrow 60\,\text{min} \div 3 = 20\,\text{min}$$

$$\frac{28}{28} \longrightarrow 28 \times 20\,\text{min} = 560\,\text{min}$$

Ou seja, a segunda torneira, sozinha, enche completamente o tanque em $560\,\text{min} = 9\,\text{h}20\,\text{min}$. ■

Sequência 4

Exercício 3.34 — OBMEP. Os números a e b são inteiros positivos tais que $\frac{a}{11} + \frac{b}{3} = \frac{31}{33}$. Qual é o valor de $a + b$?

(a) 5. (b) 7. (c) 14. (d) 20. (e) 31.

Solução. Veja que

$$\frac{31}{33}=\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=\frac{a\times 3}{11\times 3}+\frac{b\times 11}{3\times 11}=\frac{3a}{33}+\frac{11b}{33}=\frac{3a+11b}{33}.$$

Assim, $3a+11b=31$. Desse modo, procuramos um múltiplo de 3 positivo que somado a um múltiplo de 11, também positivo, resulte em 31. Como $31-11=20$ não é múltiplo de 3 e $31-22=9$ é múltiplo de 3, obtemos

$$3a=9\Longrightarrow a=3$$

e

$$11b=22\Longrightarrow b=2.$$

Portanto, $a+b=5$. A alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.35 — OBMEP. Elisa tem 46 livros de Ciências e outros de Matemática e Literatura. Sabendo que um nono dos seus livros são de Matemática e um quarto são de Literatura, quantos livros de Matemática ela possui?

(a) 23. (b) 18. (c) 8. (d) 9. (e) 36.

Solução. A fração que representa a soma das quantidades de livros de Matemática e de Lietratura que Elisa possui é

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 4}{9\cdot 4}+\frac{1\cdot 9}{4\cdot 9}=\frac{4}{36}+\frac{9}{36}=\frac{4+9}{36}=\frac{13}{36}.$$

Assim, a fração que corresponde aos livros de Ciências é

$$\frac{36}{36}-\frac{13}{36}=\frac{36-13}{36}=\frac{23}{36}.$$

Desse modo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{23}{36}\longrightarrow 46 \text{ livros}$$

$$\frac{1}{36}\longrightarrow 46\div 23=2 \text{ livros}$$

$$\frac{36}{36}\longrightarrow 36\times 2=72 \text{ livros}$$

Portanto, Elisa possui ao todo 72 livros, logo, a quantidade de livros de Matemática que ela possui é

$$\frac{1}{9}\cdot 72=\frac{72}{9}=8.$$

A alternativa correta é a da letra **(c)**. ■

Não é necessário encontrar o total de livros que Elisa possui antes de encontrar a quantidade de livros de Matemática que ela possui. De fato, como $\frac{1}{9}$ dos livros que ela possui são de Matemática e considerando as equivalências de frações

$$\frac{1}{9}=\frac{1\times 4}{9\times 4}=\frac{4}{36},$$

temos as seguintes correspondências:

$$\frac{23}{36}\longrightarrow 46 \text{ livros}$$

$$\frac{1}{36}\longrightarrow 46\div 23=2 \text{ livros}$$

$$\frac{4}{36}\longrightarrow 4\times 2=8 \text{ livros}$$

Assim Elisa possui 8 livros de Matemática.

Exercício 3.36 Duas torneiras enchem um tanque em 6 e 7 horas, respectivamente. Há um ralo no fundo do tanque, que o esvazia completamente em exatamente 2 horas, se o tanque estiver cheio e as torneiras fechadas. Estando o tanque cheio e abrindo-se as duas torneiras e o ralo, em quanto tempo o tanque ficará completamente vazio?

Solução. Em 1 hora, uma das torneiras enche $\frac{1}{6}$ do tanque e a outra enche $\frac{1}{7}$ do mesmo tanque. Abertas, simultaneamente, em 1 hora, as duas enchem

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1\times 7}{6\times 7}+\frac{1\times 6}{7\times 6}=\frac{7}{42}+\frac{6}{42}=\frac{6+7}{42}=\frac{13}{42}.$$

Por outro lado, o ralo esvazia $\frac{1}{2}$ do tanque em 1 hora, pois necessita de 2 horas para esvaziá-lo completamente. Agora, como $\frac{1}{2}=\frac{21}{42}>\frac{13}{42}$, o ralo, em cada hora, retira mais água do que o que as torneiras conseguem colocar. Desse modo, se o tanque estiver cheio, com os ralos e as torneiras abertos, o tanque ficará vazio. De fato, em $1\,\text{h}=60\,\text{min}$, a fração de água que o tanque terá perdido é

$$\frac{1}{2}-\frac{13}{42}=\frac{21}{42}-\frac{13}{42}=\frac{8}{42}=\frac{8\div 2}{42\div 2}=\frac{4}{21}.$$

Assim, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{4}{21}\longrightarrow 60\,\text{min}$$

$$\frac{1}{21}\longrightarrow 60\,\text{min}\div 4=15\,\text{min}$$

$$\frac{21}{21}\longrightarrow 21\times 15\,\text{min}=315\,\text{min}$$

Portanto, com os ralos e torneiras abertos e o tanque completamente cheio, depois de $315\,\text{min}=5\,\text{h}15\,\text{min}$ o tanque ficará completamente vazio. ■

Exercício 3.37 Três torneiras, abertas simultaneamente, enchem um tanque em 8 horas. A primeira e a segunda torneiras são capazes de encher o tanque em 18 e 24 horas, respectivamente. Quantas horas a terceira torneira levaria para encher o tanque sozinha?

Exercício 3.38 Felipe e Lucas, encarregados de uma obra, fariam todo o trabalho em 12 dias. No fim do quarto dia de trabalho, Felipe adoeceu e Lucas concluiu o trabalho sozinho, gastando mais 10 dias. Em quanto tempo Lucas faria o trabalho se tivesse trabalhado sozinho desde o início?

Solução. Como os dois fariam todo o trabalho em 12 dias, em 4 dias eles fizeram $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ do trabalho. No fim do quarto dia, restavam $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ do trabalho para serem executados. Como Lucas levou 10 dias para concluir os $\frac{2}{3}$ que faltavam, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{2}{3}\longrightarrow 10\ \text{dias}$$

$$\frac{1}{3}\longrightarrow 10\div 2=5\ \text{dias}$$

$$\frac{3}{3}\longrightarrow 3\times 5=15\ \text{dias}$$

Assim, Lucas faria o trabalho em 15 dias, se tivesse trabalhado sozinho desde o início. ■

Exercício 3.39 — CMM - adaptado. Lucas e Lauro estavam correndo numa mesma pista circular. Eles iniciaram a corrida ao mesmo tempo, do mesmo ponto de partida, porém em sentidos contrários. Em um determinado momento, os dois pararam, sem que ainda tivessem passado um pelo outro. Lucas já tinha percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento total da pista e Lauro tinha percorrido $\frac{1}{6}$ do comprimento total, mais 110 metros. Se, no momento da parada, a distância entre eles era de 90 metros, qual o comprimento total desta pista de corrida?

(a) 210 metros.
(b) 240 metros.
(c) 246 metros.
(d) 400 metros.
(e) 600 metros.

Solução. Veja que eles saíram em sentidos contrários e ainda não haviam se encontrado no momento em que ocorreu a parada. Assim, se somarmos as distâncias que os dois percorreram e a distância entre eles no momento da parada, obteremos o comprimento da pista. Mas observe que Lucas já havia percorrido $\frac{1}{2}$ do comprimento da pista e Lauro $\frac{1}{6}$ do mesmo comprimento mais 110 m. Agora, uma vez que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3}{2\times 3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4\div 2}{6\div 2}=\frac{2}{3}$$

e

$$\frac{3}{3}-\frac{2}{3}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3},$$

a fração $\frac{1}{3}$ corresponde a $110\,\text{m}+90\,\text{m}=200\,\text{m}$. Assim, temos as seguintes correspondências.

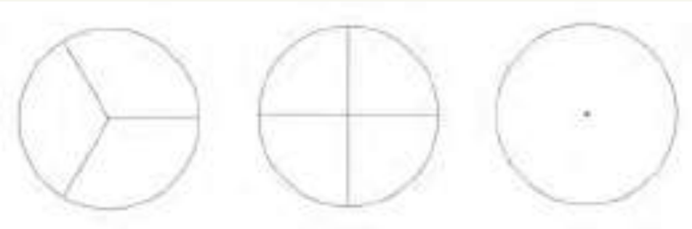
$$\frac{1}{3}\longrightarrow 200\,\text{m}$$

$$\frac{3}{3}\longrightarrow 3\times 200\,\text{m}=600\,\text{m}$$

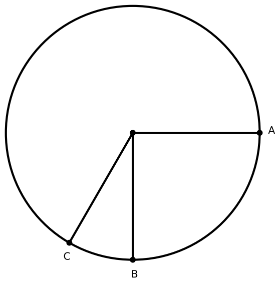
Portanto, concluímos que a pista possui 600 m, ou seja, a alternativa correta é a da letra **(e)**. ■

Exercício 3.40 Dois caminhões tanques, completamente cheios com uma mistura de álcool e gasolina, despejam totalmentes suas cargas num mesmo reservatório vazio de um posto de combustíveis. Em um dos tanques, a mistura continha $1/12$ de álcool, e no outro, a mistura continha $1/16$ de álcool. Qual a fração de álcool nesse reservatório depois de despejadas as duas cargas?

Exercício 3.41 — Adaptado do Banco da OBMEP. Certo matemático editando figuras no formato de discos em seu computador. As três figuras a seguir mostram discos de mesmo formato em que os dois primeiros foram cortados em 3 e 4 pedaços iguais, respectivamente. Ele deseja cortar o terceiro disco usando dois botões do seu programa de imagens: um que simula uma régua e corta em linha reta e outro que permite copiar e colar pedaços já cortados de discos da imagem. Explique como usar esses dois botões e os discos já desenhados para cortar o terceiro disco em 12 partes iguais.



Solução. O primeiro passo é usar o botão de copiar e colar para sobrepor os pedaços de tamanhos $1/3$ e $1/4$ dos discos da esquerda produzindo a figura a seguir:



Note que a fatia conectando os pontos B e C equivale a

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

do disco inteiro. Agora basta usar o botão de copiar e colar, repetindo sucessivamente o procedimento que gera essa fatia 11 vezes, obtendo pedaços consecutivos para dividir o terceiro disco em 12 partes iguais ■

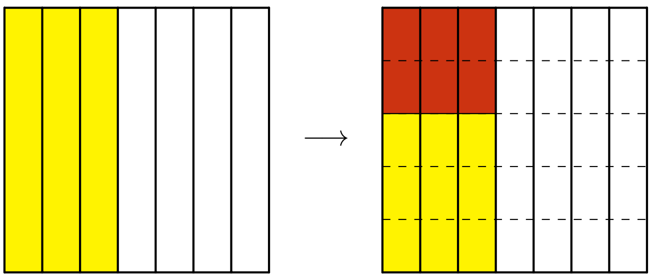
Observação 3.4 Também é possível resolver esse exercício trocando o botão de copiar e colar por um compasso, que essencialmente servirá para transportar os comprimentos de arcos entre um disco e outro.

3.3 – Multiplicação e divisão

Para dar continuidade ao estudo das operações com números racionais na forma de frações, apresentamos agora um exemplo que está relacionado à *multiplicação de frações*.

Exercício 3.42 Dona Josefa fez uma torta de frango para distribuir com seus queridos vizinhos. Ela pensou em dar $\frac{3}{7}$ da torta para Dona Francisca, a sua vizinha da direita. Porém, quando a torta estava no forno, o cheiro se espalhou pela vizinhança e ela teve que refazer a distribuição para contemplar um número maior de vizinhos. Decidiu, então, dar a Dona Francisca apenas $\frac{2}{5}$ da fração que tinha pensado em dar inicialmente. Depois de refeita a divisão, que fração da torta Dona Francisca recebeu?

Solução. A torta pode ser representada por um quadrado, que inicialmente foi dividido em sete partes iguais, pelos cortes verticais. Pintamos 3 dessas partes, representando a fração da torta que Dona Francisca receberia inicialmente: $\frac{3}{7}$ = “3 retângulos”. Em seguida, cada um desses retângulos é dividido em 5 partes iguais, pelos cortes horizontais, gerando retângulos pequenos. Assim, o quadrado fica dividido em $5 \times 7 = 35$ desses últimos retângulos. Agora, a fração da torta que a Dona Francisca recebeu corresponde a $\frac{2}{5}$ da parte originalmente pintada. Por isso, realçamos, numa cor mais escura, dois dos cinco retângulos menores de cada retângulo vertical pintado anteriormente, totalizando $2 \times 3 = 6$ retângulos realçados. Então, em termos do total de retângulos menores, a fração dos realçados é igual a $\frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}$.



Graças ao raciocínio acima, definimos o produto $\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}$ como

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{7} = \frac{2}{5} \text{ de } \frac{3}{7} = \frac{2\times 3}{5\times 7} = \frac{6}{35}.$$

Assim, Dona Francisca recebeu $\frac{6}{35}$ da torta, depois que Dona Josefa refez a divisão. ■

De modo geral, temos o seguinte algoritmo.

Multiplicação de Frações: o produto de duas frações é a fração cujo numerador é o produto dos numeradores e cujo denominador é o produto dos denominadores das frações dadas. Por exemplo,

$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{5\times3}{8\times2}=\frac{15}{16}.$$

Não esquecendo que

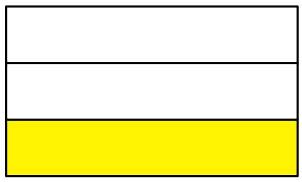
$$\frac{5}{8}\times\frac{3}{2} \text{ é } \frac{5}{8} \text{ de } \frac{3}{2},$$

ou seja, multiplicando duas frações, estamos calculando uma fração de outra fração.

Exercício 3.43 Clotilde distribuiu certa quantidade de bombons de chocolate a seus três sobrinhos. Tobias, o mais velho dos três, recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Adalberto, o mais jovem, recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou, depois que Tobias recebeu a sua parte. André recebeu os 16 bombons restantes. Adalberto deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons a Marcela, sua namorada. Quantos bombons Marcela recebeu?

(a) 42. (b) 2. (c) 12. (d) 14.

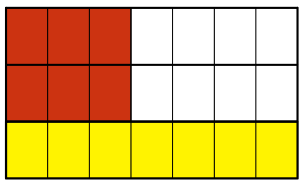
Solução. Tobias recebeu $\frac{1}{3}$ do total de bombons. Podemos representar geometricamente essa fração através da figura abaixo, na qual a parte dos bombons que coube a Tobias está pintada de amarelo.



Depois que Tobias pegou a sua parte, restaram $\frac{2}{3}$ do total de bombons, que estão representados na figura pelas duas partes brancas. Então, Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou, ou seja, recebeu

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{21}.$$

Para representar essa fração, dividimos cada retângulo horizontal em 7 retângulos menores, e pintamos de uma cor mais escura, em cada uma das duas linhas brancas, 3 desses 7 retângulos menores, pois Adalberto recebeu $\frac{3}{7}$ do que restou. O resultado é mostrado na próxima figura.



Sendo assim, as partes de Tobias e Adalberto somadas correspondem a todos os retângulos pintados:

$$\frac{1}{3}+\frac{6}{21}=\frac{7}{21}+\frac{6}{21}=\frac{13}{21}.$$

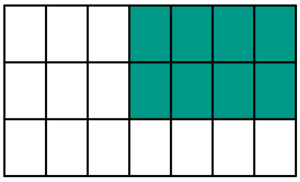
Desse modo, os oito retângulos que ficaram brancos na última figura correspondem à fração

$$\frac{21}{21}-\frac{13}{20}=\frac{8}{21}$$

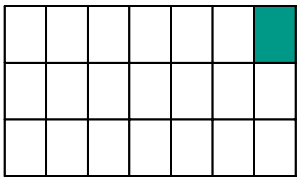
do todo. Tais 8 retângulos correspondem aos 16 bombons que André recebeu. Então, cada retângulo, $\frac{1}{21}$ dos bombons, é o mesmo que 2 bombons. Portanto, Clotilde distribuiu ao todo $21\times2=42$ bombons, como essa conclução ilustrada na seguinte sequência de três figuras.

Desses 42 bombons, $\frac{6}{21}$ foram para Adalberto. Uma vez que

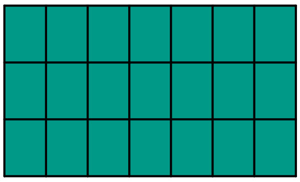
$$\frac{6}{21}\times42=6\times\frac{42}{21}=6\times2=12,$$



$= \frac{8}{21} \longleftrightarrow$ 16 bombons



$= \frac{1}{21} \longleftrightarrow 16 \div 8 = 2$ bombons



$= \frac{21}{21} \longleftrightarrow 21 \cdot 2 = 42$ bombons

concluímos que Adalberto recebeu 12 bombons. Além disso, ele deu $\frac{1}{6}$ de seus bombons para Marcela. Como

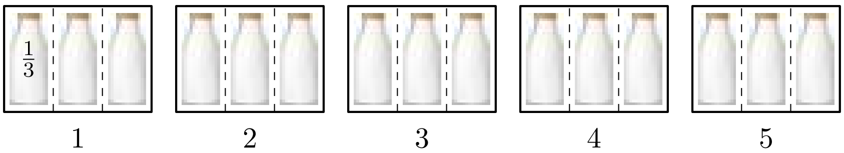
$$\frac{1}{6}\times 12 = \frac{12}{6} = 2,$$

podemos afirmar que Marcela recebeu 2 bombons. ■

O próximo exemplo está relacionado com a *divisão de frações*.

Exercício 3.44 André possui um sítio, localizado na cidade de Canindé. No sítio, há uma vaca que produz exatamente 5 litros de leite todos os dias. André divide o leite produzido em garrafas de capacidade $\frac{1}{3}$ de litro e as distribui com os parentes e amigos mais próximos. Quantas garrafas de leite são produzidas por dia no sítio de André?

Solução. Conceitualmente, precisamos dividir 5 litros por $\frac{1}{3}$ de litro, sendo essa divisão de um inteiro por uma fração: $5 \div \frac{1}{3}$. Na figura abaixo, cada uma das caixas numeradas de 1 a 5 representa um litro de leite.

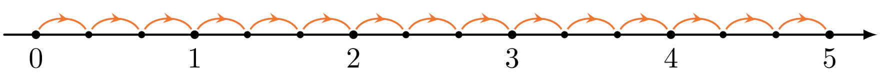


Como as garrafas têm capacidade de $\frac{1}{3}$ de litro, cada litro de leite enche exatamente 3 garrafas: algebricamente, temos $3\times\frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$. Portanto, os 5 litros de leite enchem $5\times 3 = 15$ garrafas, o que pode ser contado na figura. ■

Observando a solução do problema acima, percebemos que

$$5 \div \frac{1}{3} = 5\times\frac{3}{1} = 15.$$

Também podemos utilizar a reta numérica para interpretar geometricamente a divisão $5 \div \frac{1}{3} = 5\times 3 = 15$. Imagine que estamos caminhando sobre a reta e desejamos ir de 0 a 5, dando passos de tamanho $\frac{1}{3}$.

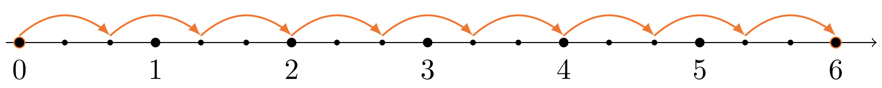


Observe, pela figura anterior, que são necessários 3 passos para percorrer cada um dos segmentos entre os números inteiros. Logo, são necessários $5 \times 3 = 15$ passos para ir de 0 a 5. Portanto,

$$5 \div \frac{1}{3} = 5 \times 3 = 15.$$

De modo análogo, $6 \div \frac{2}{3}$ representa a quantidade de passos que devemos dar se desejamos ir de 0 a 6, utilizando passos com $\frac{2}{3}$ de seu tamanho. Mas veja que, nesse caso, são necessários 3 passos de tamanho $\frac{2}{3}$ para percorrer 2 unidades inteiras, ou seja, para cada um dos intervalos $[0, 2]$, $[2, 4]$ e $[4, 6]$. Portanto, são necessários $\frac{6}{2} \times 3 = 6 \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ passos para ir de 0 a 6, ou seja,

$$6 \div \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$



Para apresentar uma interpretação geométrica para a divisão $1 \div \frac{5}{13}$, procuraremos uma resposta para a pergunta: quantos segmentos de medida $\frac{5}{13}$ cabem em 1 segmento de medida 1? Para responder a essa pergunta, primeiro note que

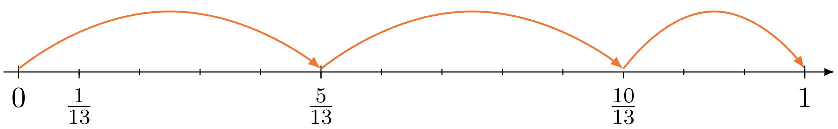
$$\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 2 \end{array}$$

Assim,

$$\left(2 + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{5}{13} = 1,$$

ou seja,

$$1 \div \frac{5}{13} = 2 + \frac{3}{5} = \frac{13}{5}.$$



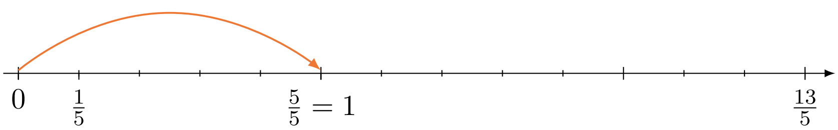
Agora, se $0 < p < n$ são números naturais, então, dividindo n por p, encontramos números naturais q e r tais que $0 \leq r < p$ e $n = qp + r$. Também aqui, obtemos

$$\left(q + \frac{r}{p}\right) \cdot \frac{p}{n} = 1,$$

o que implica

$$1 \div \frac{p}{n} = \frac{n}{p}.$$

Por outro lado, podemos interpretar geometricamente a divisão $1 \div \frac{13}{5}$, através da seguinte figura.



Na figura, a unidade foi dividida em 5 intervalos de medida $\frac{1}{5}$ e a fração $\frac{13}{5}$ corresponde a 13 desses intervalos. Assim, $\frac{5}{13}$ da fração $\frac{13}{5}$ correspondem a 5 desses intervalos menores, cuja medida é $\frac{1}{5}$. Logo, concluímos que $1 \div \frac{13}{5} = \frac{5}{13}$.

Mais geralmente, temos o seguinte algoritmo.

Divisão de Frações: para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração pela inversa da segunda. Por exemplo,

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12}$$

e

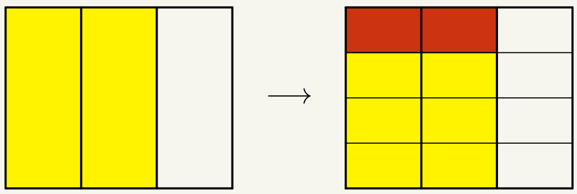
$$\frac{1}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{1 \times 3}{5 \times 1} = \frac{3}{5}.$$

3.4 – Exercícios resolvidos e propostos

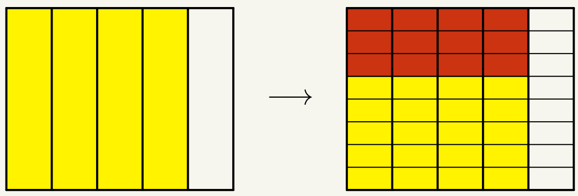
Sequência 1

Exercício 3.45 Em cada um dos itens abaixo, a parte pintada de cor clara no retângulo da esquerda representa uma fração e a parte pintada de cor escura no retângulo da direita representa o produto dessa fração por uma segunda fração. Encontre as duas frações e calcule seu produto.

(a)



(b)



Solução. (a) A parte mais clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{2}{3}$. No retângulo da direita, a parte escura representa $\frac{1}{4}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Assim, a figura representa o produto

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12}.$$

(b) A parte clara no retângulo da esquerda representa a fração $\frac{4}{5}$, enquanto a parte escura no retângulo da direita representa $\frac{3}{8}$ da parte mais clara no retângulo da esquerda. Logo, a figura representa o produto

$$\frac{3}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{40}.$$

■

Exercício 3.46 Calcule

(a) $8 \times \frac{1}{4}$.

(b) $\frac{3}{8} \times \frac{1}{7}$.

(c) $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8}$.

(d) $\frac{3}{4} \times \frac{7}{3} \times \frac{4}{7}$.

(e) $\frac{1}{2} \div 2$.

(f) $3 \div \frac{5}{3}$.

(g) $\frac{7}{4} \div \frac{7}{5}$.

(h) $\frac{9}{11} \div \frac{13}{22}$.

Solução. Temos:

(a)

$$8 \times \frac{1}{4} = \frac{8}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{8 \times 1}{1 \times 4} = \frac{8}{4} = 2.$$

(b)

$$\frac{3}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{3\times1}{8\times7}=\frac{3}{56}.$$

(c)

$$\frac{4}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{4\times9}{3\times8}=\frac{36\div12}{24\div12}=\frac{3}{2}$$

(d)

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{3\times7\times4}{4\times3\times7}=\frac{84}{84}=1.$$

(e)

$$\frac{1}{2}\div2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times1}{2\times2}=\frac{1}{4}.$$

(f)

$$3\div\frac{5}{3}=\frac{3}{1}\times\frac{3}{5}=\frac{3\times3}{1\times5}=\frac{9}{5}.$$

(g)

$$\frac{7}{4}\div\frac{7}{5}=\frac{7}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{7\times5}{4\times7}=\frac{35\div7}{28\div7}=\frac{5}{4}.$$

(h)

$$\frac{9}{11}\div\frac{13}{22}=\frac{9}{11}\times\frac{22}{13}=\frac{9\times22}{11\times13}=\frac{198\div11}{143\div11}=\frac{18}{13}.$$

■

Para tornar mais simples os cálculos efetuados em uma multiplicação de frações, podemos dividir, por um mesmo número natural, o numerador de uma das frações e o denominador de outra, procedimento esse chamado de **simplificação**. Do mesmo modo, em uma divisão de frações, podemos dividir os seus numeradores por um mesmo número natural e, também, podemos dividir os seus denominadores por um mesmo número natural. Lembre-se que, para dividir uma fração por outra, multiplicamos a primeira fração pela inversa da segunda. Logo, quando transformamos a divisão dessas frações em uma multiplicação, o numerador da segunda fração vira denominador e o seu denominador vira numerador. Por exemplo, com relação aos itens (d) e (h), do exercício 3.46, temos

$$\frac{3}{4}\times\frac{7}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{7}}=1$$

e

$$\frac{9}{11}\div\frac{13}{22}=\frac{9}{11\div11}\div\frac{13}{22\div11}=\frac{9}{1}\div\frac{13}{2}=\frac{9}{1}\times\frac{2}{13}=\frac{9\times2}{13\times1}=\frac{18}{13}.$$

Exercício 3.47 Carlos passa $\frac{1}{4}$ do dia estudando. Do tempo que passa estudando, ele utiliza $\frac{1}{3}$ para estudar Matemática. Que fração do dia Carlos utiliza para estudar Matemática?

Solução. Carlos estuda Matemática durante $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1\times1}{3\times4}=\frac{1}{12}$ do dia. ■

Exercício 3.48 Joana gastou $\frac{3}{4}$ de sua mesada na cantina da escola. Do total que gastou na cantina, $\frac{3}{7}$ foram gastos com doces. Que fração de sua mesada Joana gastou com doces?

Exercício 3.49 Quantas garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro são necessárias para distribuir 30 litros de suco?

Solução. A quantidade de garrafas com capacidade de $\frac{2}{3}$ de litro necessárias para distribuir os 30 litros de suco é

$$30 \div \frac{2}{3} = \frac{30 \div 2}{1} \div \frac{2 \div 2}{3} = 15 \div \frac{1}{3} = 15 \times 3 = 45.$$

■

Exercício 3.50 Numa corrida de revezamento, as equipes devem percorrer um total de $\frac{9}{2}$ quilômetros e cada atleta deve percorrer $\frac{3}{4}$ de quilômetro. Quantos atletas cada equipe deve ter?

Sequência 2

Para o próximo exercício, observe que, na presença de adições ou subtrações juntamente com multiplicações ou divisões, as multiplicações e divisões têm, por convenção, prioridade de execução sobre as adições e subtrações, sendo esse procedimento conhecido como **ordem de precedência** da multiplicação e da divisão sobre a adição e subtração.

Exercício 3.51 Calcule:

(a) $1 - \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$.

(b) $1\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{4} - 4$: atenção ao uso de frações mistas!

(c) $\frac{3}{5} - \frac{5}{6} \div 6$.

(d) $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \div 4$.

Exercício 3.52 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza foi comida por José?

Solução. Uma vez que Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ da pizza, restaram $\frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$ da pizza. Assim, como José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou, a fração da pizza que ele comeu foi

$$\frac{2}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \div 2}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{8 \div 2} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Portanto, José comeu $\frac{1}{4}$ da pizza. ■

Se a multiplicação das frações $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{8}$ é feita sem os cancelamentos e simplificações, obtemos

$$\frac{2}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \times 7}{7 \times 8} = \frac{14}{56}.$$

Veja que obtivemos como resposta a fração $\frac{14}{56}$, que é equivalente a $\frac{1}{4}$, uma vez que $\frac{14 \div 14}{56 \div 14} = \frac{1}{4}$. A vantagem de fazer os cancelamentos e simplificações, antes de efetuar a multiplicação, é que os cálculos ficam mais simples.

Exercício 3.53 Joaquim comeu $\frac{1}{8}$ de uma pizza e José comeu $\frac{2}{7}$ do que restou. Que fração da pizza os dois comeram juntos?

Exercício 3.54 A família de Jaime bebe água em copos cuja capacidade é $\frac{2}{5}$ de litro. Se o garrafão de água que estão utilizando ainda tem $5\frac{3}{5}$ de litros de água, quantos copos eles ainda poderão encher completamente?

Solução. Inicialmente, veja que $5\frac{3}{5} = \frac{5\times5+3}{5} = \frac{28}{5}$. Logo, ainda há $\frac{28}{5}$ litros de água no garrafão. Dividindo essa quantidade em copos com capacidade de $\frac{2}{5}$ de litro, obtemos um total de

$$\frac{28}{5} \div \frac{2}{5} = \frac{28}{\cancel{5}} \div \frac{2}{\cancel{5}} = 28 \div 2 = 14 \text{ copos.}$$

Assim, a família de Jaime ainda poderá encher, completamente, 14 copos com a água que resta no garrafão. ■

Exercício 3.55 O pai de Bruna a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. No sábado, ela comeu metade dos doces que ganhou e no domingo comeu a metade do que havia restado no sábado. Que fração da quantidade total de doces Bruna comeu no domingo?

Exercício 3.56 O pai de Maria a presenteou com alguns doces na última sexta-feira. Ela comeu metade dos doces que tinha no sábado e metade do que restou no domingo. Que fração da quantidade total de doces Maria comeu durante o fim de semana?

Exercício 3.57 A fazenda de Armando produziu 270 litros de leite durante a última semana. Ele utilizou $\frac{2}{3}$ dessa quantidade para fazer queijo e o restante vendeu em garrafas de capacidade de $\frac{1}{2}$ de litro. Quantas garrafas de leite Armando vendeu?

Exercício 3.58 Fernando construiu sua casa em $\frac{3}{7}$ de seu lote. Dias depois, plantou frutas em $\frac{1}{3}$ do restante. Calcule a fração do terreno destinada ao plantio de frutas.

Exercício 3.59 — Canguru. Em um teatro infantil, um sexto da audiência era de adultos e dois quintos das crianças eram de meninos. Qual fração da audiência era de meninas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{4}$. (d) $\frac{1}{5}$. (e) $\frac{2}{5}$.

Solução. Uma vez que $\frac{1}{6}$ da audiência era formada por adultos, $1 - \frac{1}{6} = \frac{6}{6-\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$ da audiência era composta por crianças. Como $\frac{2}{5}$ das crianças eram meninos, $1 - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ das crianças eram meninas. Assim, a fração da audiência composta por meninas era

$$\frac{3}{5}\times\frac{5}{6} = \frac{3\div3}{5\div5}\times\frac{5\div5}{6\div3} = \frac{1}{1}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.60 — Canguru. Um oitavo dos convidados de um casamento eram crianças. Três sétimos dos adultos convidados eram homens. Que fração dos convidados eram mulheres adultas?

(a) $\frac{1}{2}$. (b) $\frac{1}{3}$. (c) $\frac{1}{5}$. (d) $\frac{1}{7}$. (e) $\frac{3}{7}$.

Exercício 3.61 Num time de futebol carioca, metade dos jogadores contratados são cariocas, um terço são de outros estados e os 4 restantes são estrangeiros. Quantos jogadores contratados tem o clube?

Solução. A fração, em relação ao total, dos jogadores brasileiros é $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$. Então $\dfrac{1}{6}$ dos jogadores é estrangeiro, que totalizam 4. Assim, o total de jogadores do clube é $\dfrac{6}{1}\cdot 4=24$. ■

Sequência 3

Exercício 3.62 — OBMEP. Dois meses atrás, o prefeito de uma cidade iniciou a construção de uma nova escola. No primeiro mês, foi feito 1/3 da obra e no segundo mês, mais 1/3 do que faltava. A que fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola?

(a) 1/3.
(b) 4/9.
(c) 1/2.
(d) 2/3.
(e) 5/6.

Solução. Depois de concluído o primeiro $\frac{1}{3}$ da obra no primeiro mês, restaram $\frac{2}{3}$. Assim, no segundo mês foram concluídos $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ da obra. Assim, a fração da obra da escola concluída nos dois primeiros meses é

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{1\times 3}{3\times 3}+\frac{2}{9}=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}.$$

Logo, a fração da obra corresponde a parte ainda não construída da escola é

$$\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}.$$

■

Exercício 3.63 Uma caixa possui 64 biscoitos. Em cada um dos dias da semana passada, de segunda a sexta-feira, Artur comeu metade dos biscoitos que havia na caixa. Quantos biscoitos restaram?

Solução. Como, em cada, dia Artur come a metade dos biscoitos, a quantidade de biscoitos que resta na caixa é igual à quantidade de biscoitos que ele comeu. Assim, na segunda, Artur comeu $\frac{1}{2}\times 64=32$ biscoitos, na terça comeu $\frac{1}{2}\times 32=16$; na quarta $\frac{1}{2}\times 16=8$; na quinta $\frac{1}{2}\times 8=4$ e na sexta $\frac{1}{2}\times 4=2$. Portanto, restaram 2 biscoitos na caixa. ■

Exercício 3.64 — Fundação Carlos Chagas - adaptado. João trabalhou ininterruptamente por 2 horas e 50 minutos na digitação de um texto. Sabendo que ele concluiu essa tarefa quando eram decorridos 11/16 do dia, contados a partir das 0 h, podemos afirmar que ele iniciou a digitação do texto às

(a) 13h 40min.
(b) 13h 20min.
(c) 13h.
(d) 12h 20min.
(e) 12h 10min.

Solução. Como 1 dia tem 24 horas e cada hora tem 60 minutos, 1 dia possui $24\times 60=1440$ minutos. Assim, João finalizou a tarefa $\frac{11}{16}\times 1440=\frac{1440}{16}\times 11=90\times 11=990$ minutos depois de 0 h. Agora, veja que $990=60\times 16+30$, conforme o seguinte algoritmo de divisão.

$$\begin{array}{r|l} 9\,9\,0 & 6\,0 \\ \cline{2-2} 3\,9\,0 & 1\,6 \\ 3\,0 & \end{array}$$

Logo, João concluiu o texto às 16h 30min. Subtraindo 2h 50min de 16h 30min, obtemos 16h 30min, conforme o algoritmo de subtração abaixo.

$$\begin{array}{rrr} & 16\text{h} & 30\text{min} \\ - & 2\text{h} & 50\text{min} \\ \hline & 13\text{h} & 40\text{min} \end{array}$$

Portanto, João iniciou a digitação às 13h 40min. Assim, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.65 — OBM. Carlos fez uma viagem de 1210 km, sendo 7/11 de aeroplano, 2/5 do restante de trem, 3/8 do novo resto de automóvel e os demais quilômetros a cavalo. Calcule quantos quilômetros Carlos percorreu a cavalo.

Solução. Carlos percorreu $\frac{7}{11}$ do percurso total da viagem de aeroplano e $\frac{2}{5}\times(\frac{11}{11}-\frac{4}{11})=\frac{2}{5}\times\frac{4}{11}=\frac{8}{55}$ de trem. Somando as frações correspondentes a essas duas partes da viagem, obtemos

$$\frac{7}{11}+\frac{8}{55}=\frac{7\times5}{11\times5}+\frac{8}{55}=\frac{35}{55}+\frac{8}{55}=\frac{43}{55}.$$

Ainda restam $\frac{55}{55}-\frac{43}{55}=\frac{12}{55}$. Assim, a fração do percurso que Carlos percorreu de automóvel é

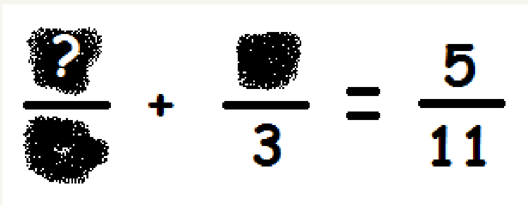
$$\frac{3}{8}\times\frac{12}{55}=\frac{3}{8\div4}\times\frac{12\div4}{55}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{55}=\frac{9}{110}.$$

Somando as frações correspondentes aos trechos percorridos de aeroplano, trem e automóvel temos

$$\frac{43}{55}+\frac{9}{110}=\frac{43\times2}{55\times2}+\frac{9}{110}=\frac{86}{110}+\frac{9}{110}=\frac{95}{110}.$$

Desse modo, Carlos percorreu $\frac{110}{110}-\frac{95}{110}=\frac{15}{110}$ do percurso a cavalo. Portanto, ele percorreu $\frac{15}{110}\times1210=\frac{1210}{110}\times15=11\times15=165$ km a cavalo. ■

Exercício 3.66 — OBMEP - 2016. A figura mostra a fração $\frac{5}{11}$ como soma de duas frações. As manchas encobrem números naturais. Uma das frações tem denominador 3. Qual é o menor numerador possível para a outra fração?



a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Solução. Como $5/11<1$, o numerador da fração que tem denominador 3 não pode ser maior ou igual a 3 e, consequentemente, é 1 ou 2. De $5/11<2/3$, podemos concluir que esse numerador só pode ser 1 e assim a fração com a interrogação é igual a

$$\frac{5}{11}-\frac{1}{3}=\frac{4}{33}.$$

Assim, como $4/33$ é uma fração irredutível, o menor numerador em questão é 4 e a resposta é a letra D. ■

Exercício 3.67 — Adaptado da OBMEP. Na igualdade abaixo, □ é um número inteiro positivo. Qual é o seu valor?

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\square}}$$

Solução. Veja que $10 = 7 \times 1 + 3$, conforme a divisão abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 0 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

Daí,

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}}.$$

Mas $4 = 3 \times 2 + 1$, conforme a nova divisão abaixo.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{10}{7} &= 1 + \frac{3}{7} = 1 + \frac{1}{\frac{7}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\square = 3$. ■

Sequência 4

Exercício 3.68 No pátio de uma montadora há carros de cinco cores: preto, branco, vermelho, azul e prata. Metade dos carros são pretos e um quinto dos carros são brancos. De cada uma das outras três cores, há números iguais de carros. Sabendo-se que existem 42 carros vermelhos, quantos carros brancos há no pátio?

Solução. Dos carros que se encontram no pátio da montadora, $\frac{1}{2}$ são pretos e $\frac{1}{5}$ são brancos. Assim, a fração que corresponde ao total de carros pretos ou brancos é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5}{2 \times 5} + \frac{1 \times 2}{5 \times 2} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}.$$

Desse modo, a fração que corresponde aos carros que não são pretos nem brancos é

$$\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Agora, como há quantidades iguais das outras três cores, a fração que corresponde à quantidade de carros de cada uma dessas cores é

$$\frac{3}{10} \div 3 = \frac{3 \div 3}{10} \div 3 \div 3 = \frac{1}{10} \div 1 = \frac{1}{10}.$$

Como há 42 carros vermelhos, quantidade essa que corresponde a $\frac{1}{10}$ do total de carros no pátio da montadora, concluímos as seguintes correspondências.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{10}{10} \longrightarrow 10 \times 42 = 420 \text{ carros}$$

Logo, há 420 carros no pátio. Os carros brancos correspondem a $\frac{1}{5}$ do total de carros no pátio, ou seja, a quantidade de carros brancos é

$$\frac{1}{5} \times 420 = 84 \text{ carros}.$$

■

Uma vez que a a fração que corresponde aos carros vermelhos é conhecida, podemos proceder do seguinte modo alternativo para encontrar a quantidade de carros brancos.

$$\frac{1}{10} \longrightarrow 42 \text{ carros}$$

$$\frac{2}{10} \longrightarrow 2\times 42 = 84 \text{ carros}$$

Note que $\frac{2\div 2}{10\div 2} = \frac{1}{5}$. Logo, a quantidade de carros brancos é igual a 84.

Exercício 3.69 A metade de um muro é pintada de vermelho, um terço do que não é pintado de vermelho, é pintado de verde, e o restante é pintado de azul. A parte pintada de azul mede 160 cm de comprimento. Qual o comprimento da parte pintada de vermelho?

Exercício 3.70 Uma herança em dinheiro foi distribuída entre quatro irmãos. Ao primeiro, coube $\frac{2}{3}$ do total, enquanto o segundo recebeu $\frac{3}{4}$ do restante. Ao terceiro coube $\frac{1}{33}$ da soma das partes dos dois primeiros. Por fim, o quarto recebeu R$ 15.000,00. Quanto recebeu cada um dos herdeiros?

Exercício 3.71 — OBMEP - adaptada. Uma loja de roupas reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço de uma camiseta, mas não conseguiu vendê-la. Na semana seguinte, reduziu em $\frac{1}{5}$ o novo preço, e a camiseta foi vendida por R$ 54,00. Qual era o preço original da camiseta?

Solução. Quando a loja reduziu em $\frac{1}{10}$ o preço da camiseta, o novo preço passou a ser $\frac{10}{10} - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$ do preço original. Depois da nova redução de $\frac{1}{5}$ do novo preço, o preço da camiseta passou a ser $\frac{4}{5}\times\frac{9}{10} = \frac{4\div 2}{5}\times\frac{9}{10\div 2} = \frac{2\times 9}{5\times 5} = \frac{18}{25}$ do preço orginal. Portanto, $\frac{18}{25}$ do preço original corresponde a R$ 54,00. Desse modo, temos as seguintes correspondências.

$$\frac{18}{25} \longrightarrow 54$$

$$\frac{1}{25} \longrightarrow 54 \div 3 = 18$$

$$\frac{25}{25} \longrightarrow 25\times 3 = 75$$

Concluímos, assim, que o preço original da camiseta era R$ 75,00. ■

Exercício 3.72 Douglas tem uma caixa de tomates. No domingo, $\frac{1}{8}$ dos tomates da caixa estragaram; na segunda-feira, estragou $\frac{1}{3}$ do que sobrou no domingo. Sobraram 70 tomates em boas condições. Qual o total de tomates que havia na caixa?

Exercício 3.73 — CMF. Para o Desfile Cívico-Militar de 7 de setembro, o Colégio Militar de Fortaleza precisou deslocar o Batalhão Escolar para a Avenida Beira-Mar. Esse deslocamento foi realizado utilizando-se 18 ônibus com 50 lugares cada um. Em $\frac{1}{3}$ dos ônibus, $\frac{1}{10}$ dos lugares ficaram livres. Em $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus, dois lugares ficaram livres em cada um. Nos demais ônibus, ficou um lugar livre em cada um. Pode-se afirmar que o efetivo deslocado para a Avenida Beira-Mar poderia ter sido transportado em:

(a) 16 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(b) 16 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.
(c) 16 ônibus e sobrariam exatamente três lugares livres em um ônibus.
(d) 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus.
(e) 17 ônibus e sobrariam exatamente dois lugares livres em um ônibus.

Solução. Vamos calcular o total de pessoas que foram à avenida Beira-mar para participar do desfile. Como $\frac{1}{3}\times 18 = \frac{18}{3} = 6$ e $\frac{1}{10}\times 50 = \frac{50}{10} = 5$, 6 ônibus foram à Beira-mar com 45 lugares ocupados. Agora, veja que $\frac{3}{4}$ do restante dos ônibus correspondem a $\frac{3}{4}\times 12 = \frac{12}{4}\cdot 3 = 3\times 3 = 9$ ônibus, os quais foram à Beira-mar com 48 lugares ocupados. Os 3 ônibus restantes foram à Beira-mar com 49 lugares ocupados. Assim, o total de pessoas que foram ao desfile é

$$\begin{aligned} 6\times 45 + 9\times 48 + 3\times 49 &= 6\times(50-5) + 9\times(50-2) + 3\times(50-1) \\ &= 18\times 50 - (6\times 5 + 9\times 2 + 3\times 1) \\ &= 900 - 51 \\ &= 849. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Portanto, fica claro que a alternativa correta é a da letra **(d)**, ou seja, o efetivo do CMF poderia ser transportado em 17 ônibus e sobraria exatamente um lugar livre em um ônibus. ■

Exercício 3.74 — CMF. Doze amigas resolveram alugar uma casa de praia para passar uma temporada. Metade do aluguel foi pago no dia da assinatura do contrato, sendo o valor dividido igualmente por todas as doze amigas. O restante deveria ser pago no dia em que chegassem à casa, porém, no dia do passeio, três amigas desistiram. O restante do valor do aluguel teve, então, de ser dividido igualmente apenas entre aquelas amigas que compareceram. A fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi de:

(a) $\frac{7}{72}$. (b) $\frac{1}{18}$. (c) $\frac{1}{24}$. (d) $\frac{1}{6}$. (e) $\frac{2}{9}$.

Solução. A metade do aluguel, que foi paga no dia da assinatura do contrato, foi dividida igualmente para as 12 amigas, logo, cada uma delas pagou $\frac{1}{2} \div 12 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{12} = \frac{1}{24}$ do valor do aluguel. Já a segunda metade, foi igualmente dividida, no dia da chegada à casa, somente entre as amigas que compareceram. Assim, cada uma das nove amigas que compareceram pagou mais $\frac{1}{2} \div 9 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{9} = \frac{1}{18}$ do valor do aluguel. Portanto, a fração do valor total do aluguel pago por cada uma das amigas que compareceram foi

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{18} = \frac{1\times 3}{24\times 3} + \frac{1\times 4}{18\times 4} = \frac{3}{72} + \frac{4}{72} = \frac{7}{72}.$$

Desse modo, a alternativa correta é a da letra **(a)**. ■

Exercício 3.75 — Adaptado do Clube de Matemática da OBMEP. A fração a seguir é equivalente a uma fração irredutível. Que fração é essa?

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot 6 + 4\cdot 8\cdot 12 + 7\cdot 14\cdot 21}{1\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 6\cdot 10 + 4\cdot 12\cdot 20 + 7\cdot 21\cdot 35}.$$

Solução. O numerador e o denominador são múltiplos de 3, logo a fração original é equivalente a

$$\frac{3(1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 8\cdot 4 + 7\cdot 14\cdot 7)}{3(1\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 10 + 4\cdot 4\cdot 20 + 7\cdot 7\cdot 35)} = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 4\cdot 2 + 4\cdot 8\cdot 4 + 7\cdot 14\cdot 7}{1\cdot 5 + 2\cdot 2\cdot 10 + 4\cdot 4\cdot 20 + 7\cdot 7\cdot 35}.$$

Agora, todas as parcelas no numerador são múltiplos de 2 e no denominador de 5, portanto a fração anterior é equivalente a

$$\frac{2\cdot(1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 4 + 7\cdot 7\cdot 7)}{5\cdot(1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 4 + 7\cdot 7\cdot 7)}.$$

Finalmente, cancelando o fator $(1 + 2\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 4\cdot 4 + 7\cdot 7\cdot 7)$, obtemos a fração irredutível a $\frac{2}{5}$. ■

4 Orientações metodológicas

Na apresentação do material e ao longo do texto, apontamos várias sugestões de caráter metodológico para a implementação de roteiros curriculares e rotinas pedagógicas de uso do material. Assim, procuramos nortear o trabalho com o material de forma que competências complexas fossem gradualmente desenvolvidas, alinhando-as com as preconizadas por documentos como a BNCC e DCRC. Ademais, relacionamos o gradual desenvolvimentos dessas habilidades à ênfase na recuperação e fortalecimento das aprendizagens.

Nesta seção, apresentaremos, ainda que brevemente, algumas sugestões relacionadas ao conceito e práticas do **ensino explícito**, conforme sistematizados pelo Professor Clermont Gauthier e seus colaboradores. Essa metodologia tem forte base empírica, não sendo apenas algo normativo e, sim, fundamentado em evidências da Psicologia Cognitiva e, ainda mais relevante, em avaliações de impacto realizadas com o necessário rigor analítico.

O desenho metodológico do ensino explícito é baseado na tríade

preparação-interação-consolidação,

referida pelo acrônimo PIC. Nessa nossa discussão inicial, enfatizamos alguns dos elementos da etapa P, a de preparação, uma vez que está fortemente associada ao contexto de recuperação de aprendizagens em que esses materiais são trabalhados, segundo o planejamento pedagógico no âmbito do Mais PAIC e do Pacto pela Aprendizagem. Esses elementos seriam:

- definir os **objetivos de aprendizado**: em nosso caso, os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes podem ser tomados como um conjunto inicial de metas de aprendizagem, as quais podem ser trabalhadas em um planejamento semanal ou quinzenal, a ser definido pelo professor. Obviamente, esses objetivos estão vinculados às competências e habilidades da BNCC e DCRC e *concorrem* para o desenvolvimento das habilidades expressas nos descritores das avaliações como SAEB e SPAECE. As atividades didáticas seriam estruturadas em torno desses objetivos, que devem ser **explícitos**, tanto para você mesmo, quanto para seus alunos. Além de explícitos, devem ser enunciados de modo que seja possível observar se foram atingidos ou não. Metas que sejam descritas de modo muito genérico e aberto serão dificilmente mensuráveis ou mesmo observáveis. Os objetivos não se resumem aos conteúdos que serão abordados, mas *também* ao que se espera dos alunos, a quais habilidades serão desenvolvidas, a como os conhecimentos serão mobilizados em atividades e a que resultados serão avaliados. Por exemplo, quando declaramos o objetivo de aprendizado formulado como o saber

  S03.H14: efetuar, segundo algoritmos corretos e justificados, a adição ou subtração de números racionais, em suas representações fracionárias

  estamos, explicitando, simultaneamente: o objetivo que os procedimentos de adição de números racionais, na forma de frações, sejam trabalhados pelos alunos; e, além disso, o objetivo de que eles e elas possam utilizar, corretamente e com justificativas válidas, esses procedimentos, quer em aplicações diretas, quer em contextos que demandem alguma modelagem.
- Delimitar as **ideias mestras** e determinar os **conhecimentos prévios**: fixados os objetivos, é preciso identificar que conhecimentos, habilidades, conceitos, técnicas, representações, em suma, que **repertório** é necessário, do ponto de vista lógico e cognitivo, como base para o trabalho com os objetivos fixados. Além disso, é igualmente relevante entender como os objetivos planejados vão sedimentar o que será estudado em seguida, imediatamente ou nos anos futuros. Para tanto, o(a) professor(a) deve ter, muito claramente, mapeamentos das ideias fundamentais que vão sendo estruturadas no eixo que passa pelos objetivos definidos. Em nosso caso, as grandes ideias da Aritmética, já mencionadas na apresentação. Além disso, é essencial que, por meio dos exercícios iniciais em cada aula, seja feita uma sondagem minuciosa de que os alunos detêm os conhecimentos prévios fundamentais.

Nos próximos cadernos, desenvolveremos esses e outros pontos mais detalhadamente.

5 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fifth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional
  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.
- Referências sobre a temática do caderno
  - Bellos, Alex. Alex no pais dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
  - Wu, Hung-Hsi. Compreender os Números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CIENTISTA CHEFE EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC