CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CADERNO DE ATIVIDADES

FORTALECENDO APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

4º E 5º ANOS

PROFESSOR

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC

Todos os direitos reservados à
Secretaria da Educação do Estado do Ceará – Centro Administrativo Virgílio Távora
Av. General Afonso Albuquerque Lima, s/n – Cambeba. Fortaleza/CE – CEP: 60.822-325

GOVERNADOR
Camilo Sobreira de Santana

VICE-GOVERNADORA
Maria Izolda Cela de Arruda Coelho

Secretária da Educação	Eliana Nunes Estrela
Secretário Executivo de Cooperação com os Municípios	Márcio Pereira de Brito
Coordenadora de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Bruna Alves Leão
Articuladora da Coordenadoria de Cooperação com os Municípios para Desenvolvimento da Aprendizagem na Idade Certa	Marília Gaspar Alan e Silva
Equipe da Célula de Fortalecimento da Alfabetização e Ensino Fundamental - Anos Iniciais	Karine Figueredo Gomes (Orientadora) Caniggia Carneiro Pereira (Gerente - 4º e 5º) Rakell Leiry Cunha Brito (Gerente - 1º ao 3º)
Leitura Crítica	Tabita Viana Cavalcante Miranda
Revisão Gramatical	Antônia Varele da Silva Gama
Equipe Programa Cientista Chefe em Educação Básica	Jorge Herbert Soares de Lira (Coordenador)
Elaboração e revisão de texto	Antonio Caminha M. Neto Bruno Holanda Emiliano Augusto Chagas Fabricio Siqueira Benevides Fernando Pimentel Jorge Herbert Soares de Lira Samuel Barbosa Feitosa Ulisses Parente

Sumário

CIENTISTA CHEFE
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

1 Apresentação do Material

Caro(a) professor(a), iniciamos, com este caderno, nossa colaboração com você e sua escola para, juntos, recuperarmos e fortalecermos o aprendizado de Matemática de nossas crianças e jovens no ensino básico em nosso estado e municípios! A avaliação de impacto da pandemia, realizada no fim do primeiro semestre deste ano, gerou evidências sobre quais conhecimentos e habilidades matemáticas estão mais fragilizadas entre alunos do quinto ano e do nono ano. Uma análise minuciosa dos dados, tanto estatística quanto pedagógica, revela que a Aritmética dos Números Naturais está na base de tópicos e técnicas que devemos consolidar inicialmente. Ou seja, fortalecendo e construindo *novos significados e abordagens* para a Aritmética, teremos fundações firmes para a ampliação do repertório matemático e o desenvolvimento cognitivo de nossos alunos.

Utilizando este caderno, você pode planejar e executar vários percursos curriculares: o tempo e a profundidade com os quais você trabalhará cada tema devem ser ajustados a cada aula. Sugerimos que seu planejamento leve em conta o desempenho dos alunos nos exercícios sugeridos ao fim de cada seção. Ao longo do texto, indicamos *sequências de tarefas* que podem ser usadas em *avaliações formativas*: nessas avaliações, é importante que você não apenas corrija tarefas em termos de “certo” ou “errado”, mas reconheça as razões dos eventuais erros e identifique os pontos em que o aluno tem avanços e outros em que ele(a) ainda necessita de reforços. Em resumo, torna-se fundamental dar ao aluno não apenas uma nota, mas uma *devolutiva* completa, acompanhada, se possível, de um roteiro de estudos específico, tendo em conta os tópicos em que ele(a) mostre estar com dificuldades.

Resumamos, agora, os conteúdos e habilidades trabalhadas neste caderno. A primeira seção (re)apresenta o **sistema posicional decimal**, ou seja, nosso sistema de numeração. O intuito não é, apenas, que o aluno possa reconhecer a expressão dos números (cardinais) usando algarismos ou na escrita, por extenso: nossa abordagem pretende mostrar como o entendimento do sistema de numeração é indispensável para *compreender* e *utilizar* corretamente os **algoritmos das operações aritméticas**, o segundo tema principal deste caderno. Apresentamos, detalhadamente, alguns procedimentos para a **adição**, **subtração** e **multiplicação** de números naturais. Algoritmos que, muitas vezes, usamos de modo irrefletido, como se fossem regras arbitrárias, são explicados e tornados *naturais* e, portanto, mais aceitáveis: a compreensão profunda desses procedimentos é necessária para que o aluno desenvolva as habilidades aritméticas definidas no DCRC. Procedimentos como o popular “tomar emprestado”, por exemplo, são justificados em termos de estratégias de reagrupamento que, de fato, são apenas modos de decompor um dado número usando o sistema de numeração decimal. Um objetivo de aprendizagem, premissa deste caderno, é o desenvolvimento do senso numérico no aluno, em particular da compreensão de que são as propriedades das operações aritméticas que dão validade a diferentes algoritmos, não apenas aos mais conhecidos, mas a outros modos de efetuar os cálculos que o próprio aluno possa desenvolver. É preciso ter à mão diversos algoritmos para contextos e problemas diferentes, parte da ideia da **flexibilidade numérica**. Por fim, este material dá ênfase à divisão de números naturais, explicitando a relação entre os algoritmos de multiplicação e o algoritmo euclidiano da divisão: em particular, vemos como o “método da chave” é explicado em termos do uso inteligente de **estimativas** de produtos (e do emprego das tábuas de multiplicação, portanto). Discutimos, ainda, as noções de múltiplos e divisores, inclusive com representações geométricas de padrões na reta numérica. Pretendemos, desse modo, preparar as bases para o estudo das frações a ser iniciado no caderno escrito para o sexto e sétimo anos. De fato, um entendimento pleno dos conceitos de **múltiplos e divisores comuns** será essencial para vencermos as dificuldades ainda representadas pelo estudo das frações.

Os exercícios ao fim de cada seção são agrupados em conjuntos, ordenados, cada um deles, em um crescendo de complexidade e/ou dificuldade técnica. Alunos com lacunas em conhecimentos mais básicos devem ser expostos, inicialmente, aos conjuntos iniciais de exercícios. Alunos que estejam mais desenvoltos quanto aos fatos e técnicas mais elementares devem ser motivados a fazer as tarefas nas sequências finais. Importante destacar que alguns dos exercícios foram escolhidos para apresentar (ou ilustrar) um certo conceito ou técnica. Recomendamos que você possa apresentar e discutir detalhadamente esses exercícios com os alunos.

Apresentamos, a seguir, um roteiro possível para uso deste caderno ao longo de quatro semanas. A tabela relaciona os objetos de conhecimentos (e suas especificações), as habilidades da BNCC e DCRC, os saberes e habilidades da **Matriz dos Saberes** e, por fim, quais descritores na Matriz de Referência do SAEB estão sendo trabalhados ou que dependem dos assuntos estudados neste material. Segue, então, uma proposta de **rotina pedagógica semanal**.

1.1 – Rotinas pedagógicas e de uso do material

Os temas a serem trabalhados são o **sistema posicional decimal**, na seção 2.1 e os **algoritmos da adição e da subtração**, nas seções 2.3 e 2.7. Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC correspondentes a essas seções, no quarto ano, são EF04MA01 a EF04MA05 e, no quinto ano, EF05MA01 e EF05MA07. Quanto a Matriz dos Saberes, os saberes e habilidades que serão mobilizados com as atividades nessas seções são

- Saber S01: reconhecer e utilizar as propriedades do sistema de numeração posicional decimal
  - S01.H1: relacionar a forma escrita, por extenso, dos números naturais a suas representações por meio de algarismos, e vice-versa.
  - S01.H2: reconhecer (e expressar-se com) o uso de números naturais em diversos contextos cotidianos, sociais, econômicos ou científico-tecnológicos
  - S01.H3: compreender a noção de cardinalidade e sua expressão como número natural
  - S01.H4: utilizar os números naturais na expressão de cardinalidade, de ordem ou de códigos numéricos
  - S01.H6: ordenar e comparar números naturais
  - S01.H8: reconhecer o efeito da posição dos algarismos, especialmente o zero, na representação ou ordem dos números naturais
  - S01.H10: compor e decompor números naturais em diversas ordens e agrupamentos, envolvendo, em particular, expansões em potências de dez
  - S01.H11: expressar, compor e decompor números naturais em termos de potências com base distintas de dez (sistemas posicionais não-decimais)
  - S01.H12: associar números naturais a pontos na reta numérica, determinando a localização de pontos correspondentes aos números
  - S01.H13: aproximar, arredondar ou estimar números naturais usando suas expressões no sistema decimal ou suas representações geométricas
- Saber S02: efetuar operações e resolver problemas envolvendo números naturais e inteiros
  - S02.H1: representar a composição e decomposição de números naturais em termos da adição e da multiplicação por potências de dez
  - S02.H2: justificar os algoritmos da adição e multiplicação em termos da composição ou decomposição de números naturais no sistema posicional decimal
  - S02.H3: descrever as operações de adição e multiplicação com a ajuda de representações simbólicas ou modelos geométricos
  - S02.H5: utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de adição de números naturais
  - S02.H11: utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de subtração de números naturais ou inteiros
  - S02.H14: utilizar as propriedades das operações de adição e multiplicação (comutatividade, associatividade, distributividade) para efetuar cálculos aritméticos
  - S02.H16: determinar parcelas desconhecidas em um cálculo aritmético a partir de parcelas e resultados dados
  - S02.H24: utilizar, em diferentes contextos e problemas, arredondamentos e estimativas de números naturais ou números inteiros e dos resultados de operações aritméticas entre esses números
  - S02.H25: formular e resolver problemas, motivados por diferentes contextos e com recurso a diferentes procedimentos, em termos da adição ou subtração de números naturais e seus vários significados e representações

Os conhecimentos e habilidades da BNCC e DCRC e os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes mencionados anteriormente estão diretamente associados aos seguintes descritores na **Matriz de Referência do SAEB para o quinto ano**: D13, D15, D1 e D19 e têm correlação com os descritores D9 e D10 (no contexto de expressão numérica de intervalos de tempo ou de trocas no sistema monetário).

Em resumo, os saberes e habilidades (S01.H1, S02.H2, etc.) listado acima devem ser entendidos como **metas de aprendizagem** dos alunos, associadas às habilidades da BNCC e DCRC para o quarto e quinto anos já mencionadas. Além disso, estabelecem uma base firme para os conhecimentos e habilidades demandados pelo SAEB e pelo SPAECE do quinto ano, especialmente em relação aos descritores enumerados anteriormente.

Em seu planejamento curricular para **um mês**, recomendamos o trabalho com este caderno de modo a cobrir estas metas de aprendizagem. Na sequência, sugerimos um roteiro de uso do caderno com essa finalidade.

1.1.1 – Primeira quinzena

Na rotina pedagógica, propomos que, na primeira quinzena, sejam trabalhadas as seguintes seções

- Representações dos números naturais: a seção inicia com uma discussão da necessidade do uso de uma notação e representação dos números naturais, considerados como expressão da *cardinalidade*. Apresentamos exemplos de uso sistema posicional decimal na expressão de números "muito grandes", demonstrando o importante avanço que eles trouxeram para a história da Matemática e das Ciências. Damos especial ênfase ao conceito do valor posicional dos algarismos, com destaque para o papel do algarismo 0. Os problemas 1 a 6 podem ser trabalhados em atividades com os alunos, reunindo-os em grupos, a fim de explorar vários aspectos conceituais dos sistemas numéricos, decimais ou não. Os exercícios 1 a 8 servem como. observações dos conhecimentos prévios dos alunos sobre a expressão dos números, seja escrita, por extenso, seja com o uso de algarismos. Recomendamos uma revisão sistemática para alunos que sentirem dificuldades nesses exercícios. Os exercícios 2.9 a 2.15 e 2.20 a 2.25 trazem aprofundamentos sobre a representação decimal ao mesmo tempo que tratam da decomposição dos números naturais em classes e ordens decimais: uma das ideias é de que os alunos experimentam as diversas formas de compor e decompor um número natural como, por exemplo, ao escrever 4 572 como 45 centenas e 72 unidades. Essa habilidade será crucial para a compreensão e uso efetivo dos algoritmos das operações aritméticas. As listas dos exercícios de 2.16 a 2.19 e de 2.26 a 2.30 trazem contextos relativos aos números naturais e algumas tarefas relacionadas a representações não-decimais destes.
- Os algoritmos para a adição: partimos do que foi trabalhado sobre composições e decomposições decimais dos números naturais para revê-las como adições, como quando escrevemos $216 = 200 + 10 + 6$. Os algoritmos da adição são, portanto, explicados em termos das propriedades operatórias fundamentais (por exemplo, comutatividade e associatividade) e da composição/decomposição decimal das parcelas e da soma. O intuito é que os procedimentos usados corriqueiramente, como o reagrupamento (o vulgo "vai um"), sejam tornados *naturais* ao serem plenamente justificados com base, de fato, em lidar com agrupamentos das quantidades somadas nas diversas classes e ordens decimais, usando livremente o fato de que podemos trocar as parcelas de lugar (comutatividade) e somar algumas parcelas inicialmente e, depois, outras (associatividade). Fica claro, ao nos aprofundarmos, o papel do 0 em todo o sistema de numeração. Os exercícios 2.31 a 2.37 devem ser bem acompanhados de modo a detectar problemas dos alunos em realizar os cálculos básicos. Os exercícios 2.38 e 2.39 trabalham a poderosa ferramenta dos arredondamentos e estimativas que será detalhada na Seção 2.5. Os exercícios 2.40 a 2.43 elucidam como desenvolver ideias algébricas básicas a partir de problemas e métodos aritméticos. Os exercícios 2.44 a 2.58 trazem contextos, relativamente simples, em que os alunos devem reconhecer, na modelagem e na resolução dos problemas, a linguagem e os usos da adição, suas propriedades e os procedimentos para efetuá-la. Os exercícios 2.59 a 2.68 trazem problemas instigantes, menos corriqueiros, sem uma alta complexidade, mas relevantes para que os alunos possam desenvolver uma compreensão menos "mecanizada" em que fiquem restritos a efetuar as operações destra e corretamente

Mencionamos, ainda, os **exercícios adicionais** como tarefas que possam ser usadas em **avaliações formativas** ao fim de cada quinzena.

Use a seguinte tabela para seu planejamento das duas primeiras semanas. O importante é que cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. O fundamental é manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

Sequência	1ª Semana (1ª e 2ª aulas)	1ª Semana (3ª e 4ª aulas)	2ª Semana (1ª e 2ª aulas)	2ª Semana (3ª e 4ª aulas)
1	Seção 2.1, Exercícios 2.1 a 2.8 (S01.H1, H8 e H10)	Seção 2.1, Exercícios 2.20 a 2.25 (S01.H1, H2, H3, H8 e H10)	Seção 2.3, Exercícios 2.31 a 2.37 (S02.H1, H2, H5 e H14)	
2	Seção 2.1, Problemas 1 a 6 (S01.H2, H3 e H4)	Seção 2.1, Exercícios 2.16 a 2.19 (S01.H1, H2, H3, H8, H10 e H11)	Seção 2.3, Exercícios 2.38 e 2.39 (S01.H7 e H13, S02.H24)	
3	Seção 2.1, Exercícios 2.9 a 2.15 (S01.H1, H8 e H10)	Seção 2.1, Exercícios 2.26 a 2.30 (S01.H10 e H11)		Seção 2.3, Exercícios 2.40 a 2.50 (S02.H24 e H25)
4				

Tabela 1.1: Primeira quinzena

1.1.2 – Segunda quinzena

Nesta segunda quinzena, serão trabalhadas as seguintes seções

- Os algoritmos para a adição: nesta etapa, sugerimos retomar os temas tratados na primeira semana. Em seguida, mapeadas as dificuldades e avanços dos alunos (individualmente ou em grupos), devem ser trabalhados os exercícios finais da Seção 2.3. Veja, acima, nossos comentários sobre os exercícios.
- Comparando, localizando e arredondando números naturais: ao longo desta seção, são trabalhados vários objetivos de aprendizagem relacionados entre si, que dizem respeito a desenvolver e aplicar conceitos fundamentais como sucessão (e a infinitude da *sequência*, portanto enumerável, por definição, dos números naturais) e ordem. A ideia aritmética de ordem, expressa pelos sinais de desigualdades, deriva dos conceitos de antecessor e sucessor e é geometricamente representada pela localização relativa dos números naturais como pontos na reta numérica. O(a) professor(a) deve, neste ponto, trabalhar, com idas e vindas, como essas ideias são interdependentes e estão também associadas à representação decimal dos números naturais. Os exercícios 2.69 a 2.79 enfatizam bastante essa temática, fortalecendo o *repertório* dos alunos acerca da ordem, comparação e localização, na reta numérica. dos números naturais. Os exercícios 2.80 a 2.87 os aprofundam, trazendo probleminhas menos rotineiros e que convidam os alunos à experimentação e à busca de soluções criativas, mas necessariamente amparadas no repertório básico consolidado. Os problemas 8 a 10 utilizam as ideias essenciais vistas antes na seção para estimar somas: esse tópico pode ser desenvolvido em exercícios das seções 2.3 e 2.7, sendo que alguns dessas tarefas envolvem, explicitamente, o uso de estimativas baseadas em arredondamentos mais e mais precisos das parcelas.
- Os algoritmos para subtração: as observações feitas anteriormente para a adição devem ser consideradas também a respeito desta seção: todos os procedimentos usualmente trabalhados nas escolas ou nos livros, a exemplo do *reagrupamento* (ou reserva, muitas vezes, inapropriadamente referido como "tomar emprestado") ou *compensação*, são explicados como consequências **diretas** da decomposição decimal e das propriedades da adição, reescritas no contexto da subtração. Os exercícios 2.88 a 2.94 exploram o uso dos algoritmos, sob múltiplas formas, algumas menos corriqueiras, além das estimativas geradas por aproximações e arredondamentos, retomando esse importante tópico. Os exercícios 2.95 e 2.120 trabalham vários contextos, inclusive com problemas retirados ou baseados em avaliações de larga escala, em que são utilizadas a subtração ou a combinação de adição e subtração, com suas propriedades e recurso a diferentes procedimentos de

cálculo aritmético. Por fim, os exercícios 2.121 a 2.126 são muito relevantes para o desenvolvimento de habilidades complexas, embora não exijam nada demasiado técnico.

- Como somar e subtrair sem caneta e papel: esta seção pode ser trabalhada em conjunto com as seções 2.3 e 2.7, com o propósito não de estimular rapidez e destreza, mas de fortalecer o senso numérico dos alunos, fazendo com que eles e elas busquem estratégias eficientes e efetivas de cálculo aritmético.

Mencionamos, ainda, os **exercícios adicionais** como tarefas que possam ser usadas em **avaliações formativas** ao fim de cada quinzena.

Use a seguinte tabela para seu planejamento das duas primeiras semanas. O importante é que cubra os temas tratados, mesmo que não haja oportunidade de passar por *todos* os exercícios. O fundamental é manter registros personalizados dos alunos, informando em quais saberes e habilidades (vide acima a relação de todos eles) estão progredindo ou ainda necessitariam de suporte.

Sequência	1ª Semana (1ª e 2ª aulas)	1ª Semana (3ª e 4ª aulas)	2ª Semana (1ª e 2ª aulas)	2ª Semana (3ª e 4ª aulas)
1			Seção 2.5, Problemas 8 a 14 (S01.H13, S02.H24)	Seção 2.7, Problemas 15 e 16, Exercícios 2.88 a 2.94 (S02.H11e H14)
2	Seção 2.3, Exercícios 2.51 a 2.58 (S02.H5, H14 e H25)		Seção 2.5, Exercícios 2.69 a 2.79 (S01.H13, S02.H24)	Seção 2.7, Exercícios 2.95 a 2.102 (S02.H11, H14 e H16)
3		Seção 2.3, Exercícios 2.59 a 2.63 (S02.H2, H14, H16 e H25)	Seção 2.5, Exercícios 2.80 a 2.87 (S01.H13, S02.H24)	Seção 2.7, Exercícios 2.103 a 2.120 (S02.H11, H14, H16, H24 e H25)
4		Seção 2.3, Exercícios 2.64 a 2.68 (S02.H2, H14, H16 e H25)		Seção 2.7, Exercícios 2.121 a 2.126 (S02.H11, H14, H16, H24 e H25)

Tabela 1.2: Segunda quinzena

CIENTISTA CHEFE
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

2 Números Naturais: representação, adição e subtração

Em que momento da sua vida você utilizou Matemática pela primeira vez? A resposta é simples: você não lembra porque era um bebezinho. Vamos pensar um pouco sobre as primeiras atitudes matemáticas que um ser humano pode ter mesmo que de maneira insconsciente. Voltando ao bebezinho, ele sabe se existe a presença de alguém perto dele e fica aflito quando as pessoas não estão em seu campo de visão.

A Matemática por trás disso está associada à diferença entre a ausência e presença de pessoas, entre o zero e números maiores do que zero. Além disso, contar pessoas e perceber se mais gente chegou ou saiu de sua presença não é uma tarefa difícil para crianças bem pequenas. A primeira Matemática que fazemos na vida é contar!

Imagem criada por brgfx - www.freepik.com. Disponível em https://www.freepik.com/vectors/background

Ao crescer, percebemos que os números estão presentes em todo lugar, na quantidade de familiares próximos nós temos, no número de colegas em nossa sala de aula, nas distâncias entre locais em nossas cidades, no tempo decorrido entre cada aula, na população de sua cidade, em senhas que você usa no celular e em vários outros contextos. Como você deve ter percebido, os números associados aos exemplos dados são bem diferentes: alguns são pequenos, outros bem grandes e, além disso, os números podem acompanhar conceitos como distância e tempo.

Neste capítulo, vamos trabalhar com números, suas representações, algumas operações e assim conseguir interpretar melhor as informações numéricas ao nosso redor.

2.1 – Representações dos números naturais

Levantar os dedos para contar, todos nós já fizemos isso. Em muitas culturas, o uso de partes do corpo para contar determina a maneira como representamos quantidades e números. Perceba que não conseguimos trabalhar com números grandes utilizando apenas os dedos. A figura seguinte demonstra como os oksapmin se "viravam" para contar números maiores que 20. Veja:

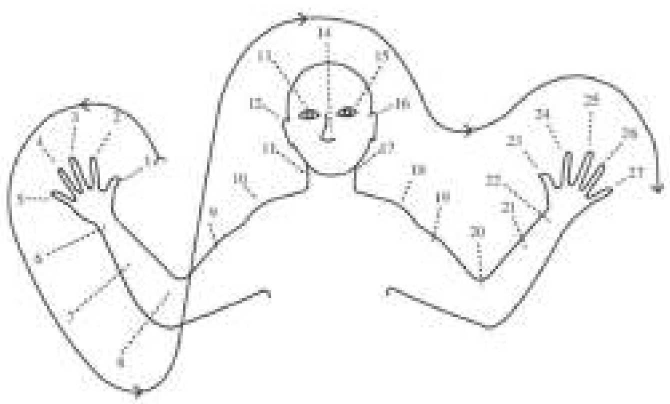


Figura 2.1: Contando como os Oksapmim. Imagem de Geoffrey Saxe retirada do ResearchGate

Portanto, para que possamos contar e representar números maiores do que dez, é preciso utilizar outra estratégia. Você já deve ter visto diversos números na sua vida, grandes ou pequenos, representados de alguma maneira. Por exemplo, a população mundial no momento em que escrevemos esse texto é igual a

$$7\,792\,864\,557 \tag{2.1}$$

pessoas, de acordo com o *World Population Clock* no *site* https://www.census.gov/popclock/

Percebam que, neste número, usamos os **algarismos decimais** 2, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Vejam, além disso, que o algarismo 7 aparece mais de uma vez no número: na primeira, segunda e última posições, da esquerda para a direita. Na primeira posição, o algarismo 7 representa 7 *bilhões*, na segunda representa 7 *milhões* e, na última, 7 *unidades*, ou seja, 7 pessoas. Vejamos como ler esse número. Para isso, podemos decompô-lo em **classes**, da seguinte forma

$$7 \text{ bilhões } + 792 \text{ milhões } + 864 \text{ milhares } + 557 \text{ unidades.} \tag{2.2}$$

Note que o sinal + indica que estamos decompondo o número total em partes ou parcelas. Por sua, a parcela 792 milhões, na **classe dos milhões**, pode ser decomposta em suas **ordens** da seguinte forma

$$792 \text{ milhões } = 7 \text{ centenas de milhão } + 9 \text{ dezenas de milhão } + 2 \text{ unidades de milhão.} \tag{2.3}$$

Da mesma forma, a parcela 844 milhares, na classe dos milhares, pode ser decomposta nas ordens

$$864 \text{ milhares } = 8 \text{ centenas de milhar } + 6 \text{ dezenas de milhar } + 4 \text{ unidades de milhar} \tag{2.4}$$

e, por fim, parcela 557 unidades, na classe das unidades, é decomposta como

$$557 \text{ unidades } = 5 \text{ centenas } + 5 \text{ dezenas } + 7 \text{ unidades.} \tag{2.5}$$

Note que o algarismo 5 aparece duas vezes no número: na posição mais à esquerda, representa 5 centenas; na posição mais à direita, 5 dezenas. Podemos representar essa decomposição em uma tabela como a que segue:

Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades
7	7	9	2	8	6	4	5	5	7

Este exemplo demonstra como é possível usar apenas poucos símbolos, os algarismos decimais ou hindu-arábicos

Figura 2.2: Image by OpenClipart-Vectors from Pixabay

para representar **qualquer** quantidade, por maior que seja! A ideia genial, uma das maiores descobertas humanas, é a de que um mesmo algarismo representa valores **10 vezes maior** para cada posição que "avança" para a esquerda em um número. O algarismo 0 tem um papel muito especial pois indica *classes* e *ordens* que ficam "vagas" quando avançamos um algarismo à esquerda ou o recuamos para a direita. O quadro a seguir explica, com mais detalhes, o papel do 0 no sistema posicional.

O número 10 é o **sucessor** do número 9, ou seja, $10 = 9 + 1$. "Movendo" o algarismo 1 da ordem das dezenas para a ordem das centenas, temos

$$100$$

Note que a posição "vaga" deixada pelo 1 foi ocupada com um algarismo 0. Com esse movimento, o algarismo 1 passa a representar uma centena. Movendo esse algarismo uma vez mais para a esquerda, temos

$$1000$$

Agora, o algarismo 1 passa a representar um milhar. As posições vagas vão sendo ocupadas por algarismos 0. Vejamos o padrão que pode ser formado assim:

$$\begin{aligned}
10 &= 1 \text{ dezena},\\
100 &= 1 \text{ centena ou } 10 \text{ dezenas},\\
1\,000 &= 1 \text{ milhar ou } 10 \text{ centenas ou } 100 \text{ dezenas},\\
10\,000 &= 1 \text{ dezena de milhar ou } 10 \text{ milhares ou } 100 \text{ dezenas ou } 1000 \text{ dezenas},\\
100\,000 &= 1 \text{ centena de milhar ou } 10 \text{ dezenas de milhar ou } 100 \text{ unidades de milhar ou } 1000 \text{ centenas ou}\\
&\quad 10000 \text{ dezenas},\\
1\,000\,000 &= 1 \text{ milhão ou } 10 \text{ centenas de milhar ou } 100 \text{ dezenas de milhar ou } 1000 \text{ unidades de milhar ou}\\
&\quad 10000 \text{ centenas ou } 100000 \text{ dezenas},
\end{aligned}$$

e assim por diante. Vejam que seria difícil prosseguir com esse padrão **infinito** escrevendo os números por extenso e dando nomes a classes cada vez maiores: bilhões, trilhões, quatrilhões, ...

Mais adiante, veremos como resolver esse problema com as **potências de dez**.

Voltando ao nosso exemplo da população mundial, concluímos que 557 pode ser *decomposto* como

$$557 = 500 + 50 + 7,$$

ou seja, 5 centenas, 5 dezenas e 7 unidades, assim como

$$864 \text{ milhares} = 800\,000 + 60\,000 + 4\,000,$$

isto é, 8 centenas de milhar, 6 dezenas de milhar e 4 unidades de milhar. Finalmente,

$$792 \text{ milhões} = 700\,000\,000 + 90\,000\,000 + 2\,000\,000,$$

o que significa, 7 centenas de milhão, 9 dezenas de milhão e 2 unidades de milhão.

Observação 2.1 — Lembrete. O algarismo 0 tem um papel especial no sistema posicional decimal: veja, por exemplo, a diferença entre

$$\begin{aligned}
1\,003 &= 1\,000 + 3,\\
1\,030 &= 1\,000 + 30,\\
1\,300 &= 1\,000 + 300.
\end{aligned}$$

Problema 1 Faça uma pesquisa para encontrar os números abaixo. Em seguida, escreva-os por extenso e usando algarismos decimais.

- Número de assentos no Castelão.
- Número de jogos do Fortaleza no Campeonato Brasileiro.
- Número de jogos do Ceará no Campeonato Brasileiro.
- Número de gols marcados por Romário.
- Número de vezes em que o Vasco foi vice-campeão.

Figura 2.3: Photo by Chaos Soccer Gear on Unsplash

Problema 2 O número de alunos na sua turma é mais próximo de 10 ou de 100? E em sua escola? Tem mais meninos ou meninas?

Problema 3 Qual a população de sua cidade? Como escrevê-la usando os algarismos decimais? Essa população é mais próxima de qual 1 000, 10 000, 100 000 ou de 1 000 000?

Problema 4 Escreva as idades de seus colegas e do(a) professor(a) de Matemática. Escreva, por extenso, os números que representam o ano em que você nasceu e o ano em que seu(sua) professor(a) nasceu.

Problema 5 Adriano estava contando os dias para voltar à escola. Veja como ele contou:

𝍸 𝍸
𝍸 |||

Você conhece essa forma de contar? Há quantos dias Adriano esperava a volta à escola?

Problema 6 Veja a seguinte imagem:

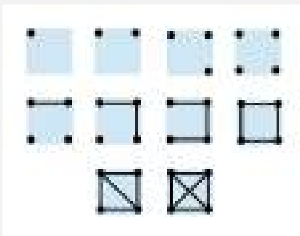


Figura 2.4: Pinethicket, CC BY-SA 4.0 <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>, via Wikimedia Commons

Você já usou essa forma de contar? Como escrever 111 usando este método? E o número de habitantes de sua cidade, como seria representado com esses pontos, linhas e quadradinhos?

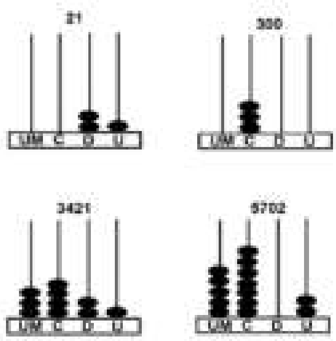
Nota ao(à) professor(a) 2.1 Proponha atividades com o uso (e pesquisa) do sistema duodecimal. Seria natural utilizá-lo? O número das falanges em uma das mãos ajudaria no processo de contagem? Como usar os novos algarismos, representados na figura? pesquisa sobre diversas formas de numeração.

Figura 2.5: Image by mireille from openclipart and edited by Sally Jenkins.

O entendimento do sistema de representação decimal pode ser aprimorado quando as crianças tomam conhecimento dos outros sistemas desenvolvidos ao longo da História da Humanidade. Além do sistema duodecimal, cabe mencionar o sistema babilônico, que usava 60 algarismos diferentes para representar os números de 0 a 59. Esse sistema deixou, como uma de suas marcas, ainda presentes no nosso quotidiano, a divisão de uma hora em 60 minutos e de um minuto em 60 segundos.

Nota ao(à) professor(a) 2.2 Realize atividades com o uso de ábacos, tanto físicos e virtuais, e *sorobans*, os ábacos japoneses. Uma ideia é organizar torneios com o uso desses instrumentos entre grupos de alunos, sempre combinando aqueles que estão com maior desenvoltura e outros com algumas dificuldades. Os ábacos e *sorobans* podem ser confeccionados como parte das oficinas. Outra possibilidade é o uso de aplicativos, disponíveis nas várias plataformas. Sobre o *soroban*, recomendamos `https://www.sorobanbrasil.com.br` e vídeos como `https://www.youtube.com/watch?v=zeDWA6gMx3A` Na página `https://www.mathematik.uni-marburg.de/~thormae/lectures/ti1/code/abacus/soroban.html`, há um simulador do *soroban*

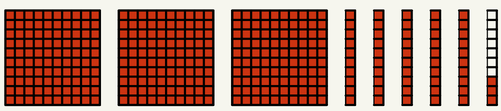
Um instrumento usado para a representação e para os cálculos com números escritos, na representação decimal, é o *ábaco*, que está representado nas imagens a seguir:



Perceba que existe uma haste para unidades, dezenas, centenas e outras ordens. Em cada haste, colocamos peças correspondentes aos algarismos dessas ordens. Sua utilidade operatória será explorada em breve.

2.2 – Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 2.1 Que número está representado na seguinte figura?



(a) 335 (b) 353 (c) 355 (d) 533

Exercício 2.2 Escreva, por extenso, os seguintes números naturais:

(a) 12 (b) 21 (c) 212 (d) 2 121 (e) 21 212

Em quais desses números o algarismo 2 representa 200?

Exercício 2.3 Escreva, por extenso, os seguintes números naturais:

(a) 37 582 (b) 730 285 (c) 5 002 738 (d) 283 570 (e) 8 507 723

Coloque esses números em ordem crescente. Qual o valor representado pelo algarismo 5 em cada um desses números?

Exercício 2.4 Represente, com algarismos decimais, os seguintes números:

(a) Quatorze
(b) Quarenta e um
(c) Quatrocentos e quatorze
(d) Quatro mil, cento e quarenta e um
(e) Quarenta e um mil, quatrocentos e quatorze

Exercício 2.5 O número *quarenta mil e quarenta e dois* é representado, com algarismos decimais, por

(a) 44 002 (b) 44 200 (c) 40 402 (d) 40 042

Marque a alternativa correta.

Exercício 2.6 O número 20 057 pode ser decomposto como

(a) 2 dezenas de milhar, 5 centenas e 7 unidades.
(b) 2 dezenas de milhar, 5 dezenas e 7 unidades.
(c) 2 milhares, 5 centenas e 7 unidades
(d) 2 milhares, 5 dezenas e 7 unidades

Marque a alternativa correta.

Exercício 2.7 Represente, com algarismos decimais, os seguintes números:

(a) Oito dezenas de milhares, cinco milhares, seis centenas e vinte e seis unidades.
(b) Trinta e dois milhares, oito centenas e quinze unidades.
(c) Trezentos e setenta e sete centenas, duas dezenas e nove unidades.
(d) Vinte e sete milhares, quarenta e sete dezenas e cinco unidades.
(e) Dez milhares e cinquenta e oito unidades.

Exercício 2.8 Marque todas as alternativas abaixo com números iguais a 41 414.

(a) 4 milhares e 1414 unidades
(b) 40 milhares e 414 unidades
(c) 41 milhares e 414 unidades
(d) 410 centenas e 14 unidades
(e) 414 centenas e 14 unidades

Exercício 2.9 O número 99 999 vem antes de 10 000 ou de 100 000? Justifique sua resposta.

Exercício 2.10 Escreva o maior número de 3 algarismos formado pelos algarismos 3, 7 e 9.

__ __ __

Exercício 2.11 Preencha as lacunas nas seguintes frases:

- O número 24 158 equivale a ____ milhares e ____ unidades.
- O número 24 158 equivale a 2 __________, 1 __________ e 58 __________.
- O número 24 158 equivale a ____ unidades de milhar, ____ dezenas e ____ unidades.
- O número 24 158 equivale a 24 __________, 15 __________ e 8 __________.

Exercício 2.12 Em qual dos números abaixo o algarismo 5 representa a maior quantidade?

(a) 30 605 (b) 30 560 (c) 36 050 (d) 35 600

Qual o valor representado pelo algarismo 6 em cada um desses números?

Exercício 2.13 Em qual das alternativas abaixo o algarismo 5 do número listado tem o valor de 500 unidades?

(a) 135 120
(b) 5 210
(c) 20 501
(d) 25 100

Solução. Percorrendo os algarismos de um número da direita para a esquerda, o algarismo 5 tem o valor de 5 unidades quando está na primeira posição, de 50 unidades quando ocupa a segunda posição, de 500 unidades quando se encontra na terceira posição, e assim por diante. Logo, a alternativa que apresenta um número em que o algarismo 5 vale 500 unidades é a de alternativa (c). ■

Observe que, no número 20 501, o algarismo 2 corresponde a 20 000 unidades ou 2 000 dezenas ou 200 centenas ou 20 milhares ou 2 dezenas de milhares.

Exercício 2.14 Qual dos seguintes números naturais é o maior?

(a) 90 099 (b) 99 090 (c) 99 900 (d) 90 909

Justifique sua resposta.

Exercício 2.15 Qual o maior número menor que 1 000 000 que podemos escrever com os algarismos 0, 4, 7 e 9?

__ __ __ __ __ __

Exercício 2.16 Em Francês, 92 se escreve *quatre-vingt-douze*, ou seja, quatro vintes e doze. Faz sentido?

Exercício 2.17 Represente os números 3 572, 3 752 e 5 732 em um ábaco.

Exercício 2.18 A população atual de Fortaleza é *estimada* em aproximadamente 2 700 000 habitantes, enquanto a população da cidade de Milagres é atualmente estimada em 27 000. **Quantas vezes** a população estimada de Fortaleza é maior do que a população estimada de Milagres?

Exercício 2.19 Isabela esqueceu o ano em que o Brasil tornou-se independente de Portugal, mas sabe que este ano é escrito com os algarismos 1, 8 e 2. Você concorda que, se ela pensar um pouquinho mais, consegue **deduzir** todas as possíveis datas? Quais seriam?

Exercício 2.20 Cristiano errou ao escrever o número *cento e onze mil e vinte e sete* com algarismos decimais. Veja o que ele escreveu:

$$1001100027$$

Que erros ele cometeu? Represente corretamente este número.

Exercício 2.21 O número 2 021 é igual a

a) 2000+20+1
b) 2000+20
c) 200+2+1
d) 2000+200+1

Solução. No número 2 021, o algarismo 1 corresponde a uma unidade simples (1) e a 2 dezenas (20). O primeiro algarismo 2, à esquerda, representa 2 unidades de milhar. Portanto, $2\,021 = 2\,000 + 20 + 1$. A resposta está na alternativa a). ■

Exercício 2.22 A decomposição do número 2 367 é

a) 23 + 67 unidades.
b) 2 000+300+60+7.
c) 20+3+67.
d) 200+30+60+7.

Solução. Para obter a decomposição correta, é possível realizar a seguinte sequência de operações:

$$\begin{aligned} 2367 &= 2\,360 + 7 \\ &= 2\,300 + 60 + 7 \\ &= 2\,000 + 300 + 60 + 7. \end{aligned}$$

A resposta está na alternativa b). ■

Exercício 2.23 Em uma cidade, a quantidade de carros é igual a seis milhares, mais sete centenas, mais oito dezenas, mais seis unidades, ou seja,

a) 6 786.
b) 6 876.
c) 7 686.
d) 8 766.

Solução. Pela leitura, podemos concluir que o número de carros é $6000 + 700 + 80 + 6 = 6\,786$. A resposta é a da alternativa a). ■

Exercício 2.24 — Prova Brasil. Uma escola recebeu a doação de 3 caixas de 1 000 livros, mais 8 caixas de 100 livros, mais 5 pacotes de 10 livros, mais 9 livros. Esta escola recebeu

a) 3 589 livros.
b) 3 859 livros.
c) 30 859 livros.
d) 38 590 livros.

Solução. De acordo com o enunciado, temos 3 caixas de 1 000 livros, ou seja 3 *milhares*. Além disso, temos 8 caixas de 100 livros, correspondendo a 8 *centenas*, 5 pacotes de 10 livros correspondendo a 5 *dezenas* e, finalmente, 9 livros avulsos, ou seja, 9 *unidades*. Essa escola recebeu no total 3 859 livros, ou seja, alternativa b). ■

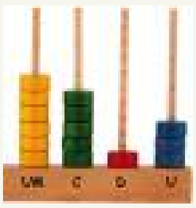
Exercício 2.25 — SPAECE. Uma professora escreveu no quadro quatro números e perguntou:

Responda: esse número é

a) 1 470
b) 3 704
c) 17 008
d) 75 083

Solução. O algarismo 7 vale 700 quando inserido na posição das centenas e isso ocorre apenas na alternativa b). ■

Exercício 2.26 Observe o ábaco da figura a seguir e determine



a) O número representado.
b) Quantas peças devem ser colocadas e quantas devem ser retiradas de cada haste para se obter o número 3 243?
c) Qual o maior número que poderá ser formado, se pudermos escolher duas peças para colocar em qualquer haste do ábaco da imagem?

Solução.

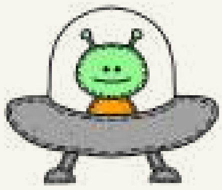
a) 6 513 (seis mil, quinhentos e treze).
b) Na unidade de milhar (UM), devemos retirar 3 peças; nas centenas, também 3 peças; e, nas dezenas, devemos acrescentar 3 peças.

c) Para obtermos o maior número, devemos colocar as duas peças na haste mais à esquerda, obtendo o número 8 513 (oito mil, quinhentos e treze).

■

Exercício 2.27 Observe os números do Planeta KKKK.

$$\begin{array}{rcl} 1 & \rightarrow & a \\ 10 & \rightarrow & b \\ 100 & \rightarrow & c \\ 1000 & \rightarrow & d \end{array}$$



Os habitantes deste planeta escrevem o número 123 do nosso sistema decimal da seguinte forma:

$$cbbaaa$$

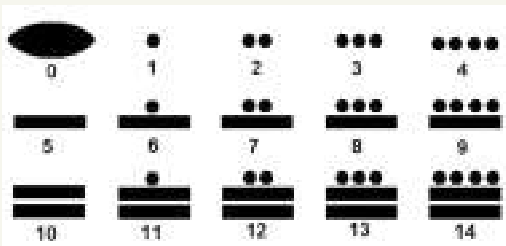
Como se escreve o número 245 do nosso sistema decimal no Planeta KKKK?

Solução. Seguindo o exemplo, para formar 2 centenas, devemos escrever 2 vezes a letra c. Para formar 4 dezenas, devemos escrever 4 vezes a letra b. Finalmente, para formar 5 unidades, devemos escrever 5 vezes a letra a. Tudo isso deve ser escrito em ordem para obter o número

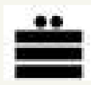
$$ccbbbbaaaaa$$

■

Exercício 2.28 A imagem a seguir ilustra a representação dos primeiros números no sistema de numeração maia.



a) Seguindo o padrão apresentado na figura, que número deve representar a imagem a seguir?



b) Qual imagem deve corresponder ao número 19?

Solução.

a) Cada barra vertical indica 5 unidades e, cada ponto, 1 unidade. Seguindo o padrão das imagens, devemos ter a representação do número 17.
b) Decompondo o número 19 como $5 + 5 + 5 + 4$, seguindo o padrão anterior, teremos a representação:

■

Exercício 2.29 Como alguém pode pagar uma conta de R$ 127,00 a um comerciante que não dispõe de troco, utilizando 2 notas de R$ 100,00, 9 cédulas de R$ 10,00 e 9 moedas de R$ 1,00?

Solução. Para pagar uma conta de R$ 127,00 nas condições acima, devemos usar 1 nota de R$ 100,00, pois 2 notas de R$ 100,00 inteiram um valor maior que a quantia devida (e o comerciante não dispõe de troco), enquanto 1 nota de R$ 100,00 deixa um débito de R$ 27,00, que deve ser coberto por cédulas e moedas de R$ 10,00 e R$ 1,00. Esses 27 reais devem ser pagos com duas cédulas de R$ 10,00 e sete moedas de R$ 1,00. ■

Exercício 2.30 — OBMEP 2019 - Nível A. A soma dos algarismos do ano 2019 é 12. Daqui a quantos anos a soma dos algarismos do ano será novamente 12?

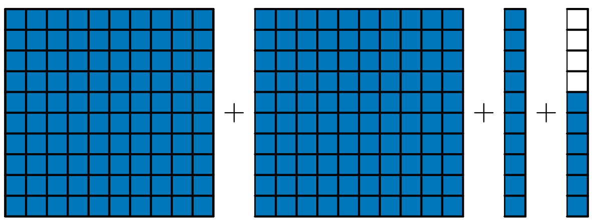
a) 1 b) 6 c) 9 d) 11 e) 12

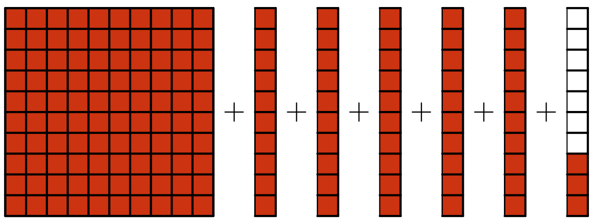
Nota ao(à) professor(a) 2.3 Até este ponto, trabalhamos o fato de que, para expressar quantidades com números *cardinais*, precisamos representá-los usando um conjunto finito de símbolos. Para isso, o mesmo símbolo, o algarismo, expressa quantidades diferentes dependendo de sua posição na representação do número: em nosso caso, *multiplicamos* o valor do algarismo por 10 a cada posição mais à direita que ocupe. Nos exercícios, apresentamos outros sistemas, históricos ou fictícios, para que essa ideia geral fique bem assentada, independentemente dos símbolos específicos que estejamos trabalhando. O professor deve observar que a própria representação decimal dos números já **embute** as operações de adição e multiplicação. Reciprocamente, para o entendimento das operações de adição e multiplicação, o aluno deve ter uma sólida compreensão da *composição* e *decomposição* dos números naturais no sistema posicional decimal. Esse tema voltará a ser explorado na seção **??**.

2.3 – Os algoritmos para a adição

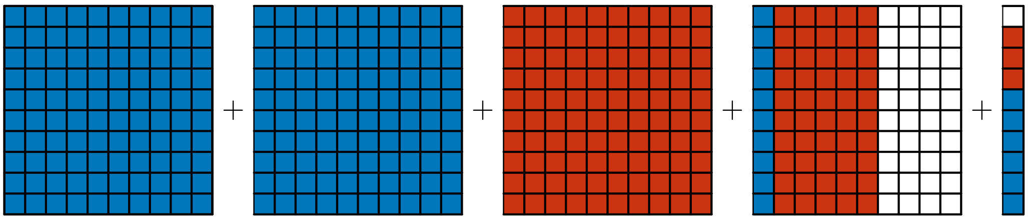
Um *algoritmo* é uma sequência finita de instruções, isto é, uma "*receita*" passo a passo, que visa obter uma solução para um problema. Nesta seção do caderno, nosso problema é, simplesmente, calcular a soma de dois números naturais e a receita deve funcionar para quaisquer dois números.

No que segue, vamos descrever o *algoritmo da adição* a partir de alguns exemplos. Iniciamos com a soma $216+153$. Esses números podem ser decompostos em $200+10+6$ e $100+50+3$, como representado na seguinte figura:





Adicionar ou **somar** esses números corresponde a juntar todos os quadradinhos destacados nas figuras anteriores, obtendo:



Obtemos, agrupando os quadradinhos destacados, um total de

$$300 + 60 + 9$$

unidades. Usando o sistema decimal, podemos representar esse cálculo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 216 + 153 &= 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 3 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 6 + 3 \\ &= 300 + 60 + 9 \\ &= 369. \end{aligned}$$

Assim, efetuamos a adição "$216 + 153 = 369$" usando a representação decimal das **parcelas**, ou seja, dos números que estão sendo somados. Adicionamos as unidades do primeiro número com as unidades do segundo; as dezenas do primeiro número com as dezenas do segundo e, por fim, as centenas do primeiro número com as centenas do segundo. Podemos representar essas operações do seguinte modo:

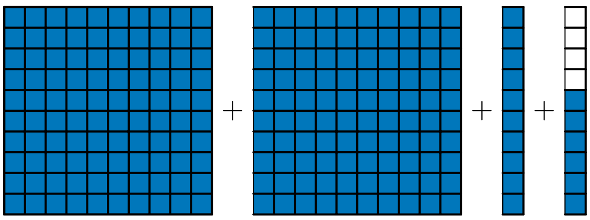
$$\begin{array}{r} 200 + 10 + 6 \\ +\ 100 + 50 + 3 \\ \hline 300 + 60 + 9 \end{array}$$

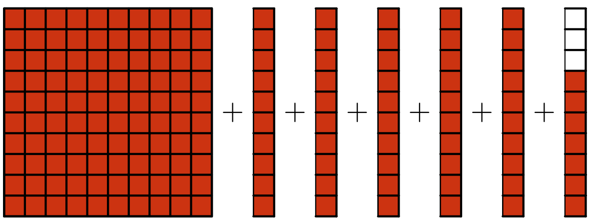
Podemos escrever essa expressão de modo mais sucinto como

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 6 \\ +\ 1\ 5\ 3 \\ \hline 3\ 6\ 9 \end{array}$$

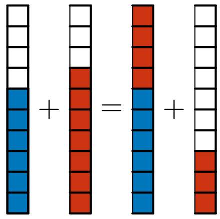
Perceba que nessa forma mais prática de escrever a soma, as **parcelas** estão escritas de modo que seus algarismos nas respectivas ordens estão alinhados: centenas com centenas, dezenas com dezenas, unidades com unidades.

Prosseguindo, calculemos, agora, a soma $216 + 157$. As parcelas, agora, são decompostos como $200 + 10 + 6$ e $100 + 50 + 7$, como representado nas seguintes figuras:

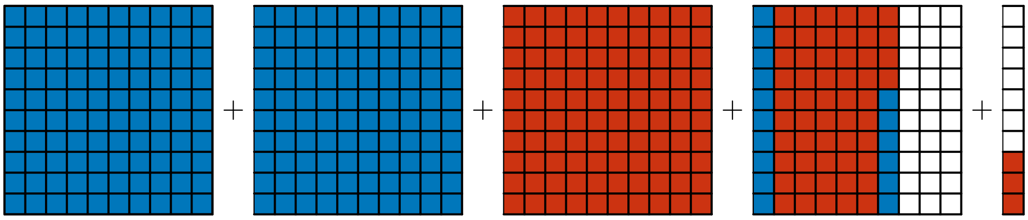




Note que as 6 mais 7 unidades somam 13 unidades, ou seja, 1 dezena e 3 unidades, conforme as seguintes figuras:



Esta soma, portanto, pode ser representada da seguinte forma:



Representamos, agora, esta soma com o uso do sistema decimal, escrevendo

$$\begin{aligned} 216 + 157 &= 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 7 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 6 + 7 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 13 \\ &= 200 + 100 + 10 + 50 + 10 + 3 \\ &= 300 + 70 + 3 \\ &= 373. \end{aligned}$$

Na segunda linha, somamos as 6 unidades e as 7 unidades, obtendo 13 unidades. Na quarta linha, escrevemos 13 como $10 + 3$, ou seja, 1 dezena e 3 unidades. Na quinta linha, somamos essa dezena às $1 + 5 = 6$ dezenas que já tínhamos, obtendo 7 dezenas. Portanto, a soma é dada por 3 centenas, 7 dezenas e 3 unidades. Podemos "armar" essas contas da seguinte forma:

$$\begin{array}{rr} & 200 + 10 + 6 \\ + & 100 + 50 + 7 \\ \hline & 300 + 60 + 3 \\ + & 10 \phantom{{}+3} \\ \hline & 300 + 70 + 3 \end{array}$$

Na primeira linha, temos a decomposição $216 = 200 + 10 + 6$. Na segunda linha, a decomposição $157 = 100 + 50 + 7$. Somamos 200 e 100, somamos 10 e 50 e somamos 6 e 7. Na terceira e quarta linhas, temos o resultado dessas somas:

$$300 + 60 + 13 = 300 + 60 + 10 + 3 = 300 + 70 + 3 = 373.$$

Veja que decompomos o 13 em $10 + 3$, obtendo 1 dezena e 3 unidades. Reescrevendo essa conta com um *dispositivo prático*, temos

$$\begin{array}{rccc} & & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 1 & 6 \\ + & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 3 & 7 & 3 \end{array}$$

O algarismo 1 que aparece na primeira linha representa as 10 unidades (ou 1 dezena) que obtemos quando somamos $6 + 7 = 13$ e escrevemos o resultado 13 como $10 + 3$. Fica, assim, explicado o que as pessoas, comumente, chamam de "vai um" no cálculo da adição. Para esclarecer isso, estudaremos mais um exemplo: desta vez, vamos calcular a soma $216 + 187$. Usando as decomposições decimais dessas parcelas, temos

$$\begin{aligned}
296 + 157 &= 200 + 90 + 6 + 100 + 50 + 7 \\
&= 200 + 100 + 90 + 50 + \underbrace{6 + 7}_{=13=10+3} \\
&= 200 + 100 + 90 + 50 + 13 \\
&= 200 + 100 + \underbrace{90 + 50}_{=140=100+40} + 10 + 3 \\
&= 200 + 100 + 140 + 10 + 3 \\
&= 300 + 150 + 3 \\
&= 300 + 100 + 50 + 3 \\
&= 453.
\end{aligned}$$

Armando estas contas como fizemos da vez passada, obtemos

$$\begin{array}{r}
200 + 90 + 6 \\
+\ 100 + 50 + 7 \\
\hline
300 + 40 + 3 \\
+\ 100 + 10 \\
\hline
400 + 50 + 3
\end{array}$$

Na primeira linha, temos a decomposição $296 = 200 + 90 + 6$. Na segunda linha, a decomposição $157 = 100 + 50 + 7$. Somamos 200 e 100, somamos 90 e 50 e somamos 6 e 7. Na terceira e na quarta linhas, temos o resultado dessas somas.

$$300 + 140 + 13 = 300 + 100 + 40 + 10 + 3 = 400 + 50 + 3 = 453.$$

Veja que decompusemos o 13 em $10+3$, obtendo 1 dezena e 3 unidades. Da mesma forma, decompusemos o 140 em $100 + 40$, obtendo 1 centena e 4 dezenas. Podemos escrever tudo isso de modo bem mais sucinto, observe:

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 1\ 1\ \ } \\
2\ 9\ 6 \\
+\ 1\ 5\ 7 \\
\hline
4\ 5\ 3
\end{array}$$

Na primeira linha, o primeiro algarismo 1, à esquerda, representa a 1 centena que temos ao decompor $150 = 100 + 40 + 10$. O segundo algarismo 1 representa a dezena que obtemos quando decompomos $13 = 10 + 3$. Isso justifica por que "vai um" da ordem das dezenas para a ordem das centenas e porque "vai um" da ordem das unidades para a ordem das dezenas!

Nota ao(à) professor(a) 2.4 Sugerimos, a fim de explorar os conceitos e desenvolver a práticas da adição e da composição e decomposição dos números naturais, o(a) professor(a) possa organizar atividades com o uso do ábaco ou do *soroban*, como torneios numéricos.

Nota ao(à) professor(a) 2.5 Além do ábaco ou do *soroban*, recomendamos o uso de modelos geométricos e físicos para ilustrar a adição e suas propriedades fundamentais.

Problema 7 Quanto é $9 + 99 + 999$?

Vamos resolver esse problema de três modos. Calculamos, segundo a **adição com reagrupamento** ou **adição com reserva** (o popular "vai um"),

$$\begin{array}{r}
{\scriptstyle 2\ 2\ \ } \\
9\,9\,9 \\
9\,9 \\
+\quad 9 \\
\hline
1\,1\,0\,7
\end{array}$$

Quando efetuamos a soma dessa maneira, começamos somando os números na ordem das unidades, obtendo $9+9+9=27=20+7$. Assim, "fica" o 7 na ordem das unidades e "vai" o 2 para a ordem das dezenas. De fato, o algarismo 2, representado como o primeiro algarismo da direita para a esquerda na primeira linha, corresponde a 20 unidades ou 2 *dezenas*. Agora, somando os números na ordem das dezenas, temos $20+90+90=200$, obtendo 2 *centenas*. Logo, "fica" o 0 na ordem das dezenas e "vai" o 2 para a ordem das centenas. Na sequência, somamos os números na ordem das centenas, obtendo $200+900=1\,100$, ou seja, 1 unidade de milhar e 1 centena. O número resultante é $1\,107$.

Neste exercício, também é possível decompormos as *parcelas* da soma como

$$\begin{aligned} 999 &= 900+90+9 \\ 99 &= 90+9 \\ 9 &= 9 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 999+99+9 &= 900+90+9+90+9+9 \\ &= 900+90+90+\underbrace{9+9+9}_{20+7} \\ &= 900+90+90+20+7 \\ &= 900+\underbrace{90+90+20}_{200}+7 \\ &= \underbrace{900+200}_{1\,000+100}+7 \\ &= 1\,000+100+7 \\ &= 1\,107. \end{aligned}$$

Nessa sequência de operações, justificamos o uso do algoritmo da **adição com reagrupamento**: o algarismo 2 que "vai" para a ordem das dezenas e o algarismo 2 que "vai" para a ordem das centenas.

Apresentamos, agora, uma solução mais rápida, usando **subtrações**. Perceba que

$$\begin{aligned} 9+1 &= 10, \\ 99+1 &= 100, \\ 999+1 &= 1\,000. \end{aligned}$$

Somando as parcelas dos lados esquerdos, as parcelas dos lados direitos e *reagrupando* os termos, temos

$$999+99+9+1+1+1=1\,000+100+10.$$

Logo,

$$999+99+9+3=1\,110.$$

Subtraindo 3 dos dois lados da igualdade, obtemos:

$$999+99+9=1\,110-3=1\,107.$$

Essa solução do problema dá uma ideia sobre a importância de usarmos as **propriedades operatórias** da adição, como a *comutatividade* e a *associatividade*. A comutatividade implica que as somas $1+99$ e $99+1$ são iguais, ou seja, que a mudança da ordem das parcelas, da esquerda para a direita, não altera a soma. Já a associatividade assegura que obtemos a mesma soma se

- somarmos as parcelas $999+99$ e, em seguida, somarmos 1 ao resultado, isto é, se fizermos os cálculos na ordem $(999+99)+1$,
- ou se somarmos $99+1$ primeiro e, após, somarmos 999 ao resultado, isto é, se fizemos os cálculos na ordem $999+(99+1)$.

Daqui por diante, as operações entre parênteses serão efetuadas primeiro. De fato, temos uma *convenção* na Matemática para indicar a ordem em que as operações são efetuadas, como veremos adiante. O que a associatividade diz é que a ordem em que efetuamos as adições **não afeta** o resultado. No entanto, a *escolha* de uma certa ordem pode *simplificar* as contas!

Logo, usando a comutatividade e a associatividade, temos

$$999 + 1 + 99 = 999 + (99 + 1) = 999 + 100 = 1\,099.$$

ou, ainda,

$$999 + 1 + 99 = (999 + 1) + 99 = 1\,000 + 99 = 1\,099.$$

Esses são exemplos simples de como podemos usar essas propriedades até para calcular somas **sem lápis e papel** (e sem calculadora)!

2.4 – Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 2.31 Calcule as seguintes somas:

- 7+2
- 7+3
- 17+3
- 17+13
- 187+23

Solução. Para começar, temos

$$7 + 2 = 7 + 1 + 1 = 8 + 1 = 9,$$
$$7 + 3 = 7 + 2 + 1 = 9 + 1 = 10.$$

Com isso, calculamos

$$17 + 3 = 10 + 7 + 3 = 10 + 10 = 20,$$
$$17 + 13 = 10 + 7 + 10 + 3 = 10 + 10 + 10 = 30,$$

Finalmente, somamos

$$187 + 23 = 100 + 80 + 7 + 20 + 3 = 100 + 100 + 10 = 210.$$

■

Nota ao(à) professor(a) 2.6 Use este exercício, mais simples, para mostrar que qualquer adição de um número natural a outro pode ser decomposto por somas sucessivas de 1 unidade. Quando somamos 1 a um número, obtemos seu sucessor. Assim, a adição é uma **iteração** de sucessões! Além disso, note que usamos as propriedades da **comutatividade** e da **associatividade** para calcularmos as somas, sem sequer comentarmos a respeito. Por fim, use os dois últimos itens do exercício para mostrar aos alunos que somar em uma ordem em vez de outra pode simplificar bastante os cálculos!

Exercício 2.32 Complete as lacunas em cada uma das igualdades:

- 99 + ___ = 100 + 25
- 65 + 45 = 10 + ____
- 18 + 27 = ____ +9
- 23 + 51 = 13 + ____

Solução. O objetivo não é calcular cada soma, mas reescrevê-la com outras parcelas, *redistribuindo* as quantidades somadas. Vejamos:

- $100 + 25 = 99 + 1 + 25 = 99 + 26$. Logo, concluímos que $99 + 26 = 125$ sem fazer contas!

- $65 + 45 = 60 + 5 + 40 + 5 = 10 + 60 + 40 = 10 + 100$. Assim, deduzimos que $65 + 45 = 110$.
- $18 + 27 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 36 + 9$.
- $23 + 51 = 13 + 10 + 51 = 13 + 61$.

■

Exercício 2.33 Calcule as seguintes somas:

- 52+23
- 52+29
- 72+29
- 92+29
- 56+97

Solução. Utilizemos as propriedades da adição para fazermos os cálculos, observe:

- $52 + 23 = 50 + 2 + 20 + 3 = 70 + 5 = 75$.
- Seguindo o modelo de cálculo anterior, temos: $52+29 = 52+23+6 = 75+6 = 75+5+1 = 80+1$.
- Seguindo o modelo de cálculo anterior, temos: $72+29 = 20+52+29 = 20+81 = 20+80+1 = 101$. Outra forma de calcular a soma seria $72 + 29 = 71 + 1 + 29 = 71 + 30 = 101$.
- $92 + 29 = 90 + 2 + 20 + 9 = 90 + 9 + 20 + 2 = 99 + 22 = 99 + 1 + 21 = 100 + 21 = 121$. Busque outras soluções, mais curtas!
- $56 + 97 = 55 + 1 + 95 + 2 = 50 + 90 + 5 + 5 + 1 + 2 = 140 + 10 + 3 = 153$. Busque outras soluções, mais curtas, como $56 + 97 = 50 + 6 + 90 + 7 = 140 + 13 = 153$.

■

Exercício 2.34 Calcule as seguintes somas:

- 512+273
- 582+732
- 702+298
- 192+229+138
- 1 015+857

Solução. Utilizemos as propriedades da adição para fazermos os cálculos:

- $512 + 273 = 500 + 10 + 2 + 200 + 70 + 3 = 700 + 80 + 5 = 785$.
- $582+273 = 500+80+2+200+70+3 = 700+150+5 = 700+100+50+5 = 800+50+5 = 855$. Note que decompusemos $150 = 100+50$, Isso significa que **reagrupamos** 100 unidades como uma 1 centena. Veja a conta armada:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 5\,8\,2 \\ +\,2\,7\,3 \\ \hline 8\,5\,5 \end{array}$$

  O 1 que "vai" para a ordem das centenas representa a 1 centena que reagrupamos.
- $702 + 296 = 700 + 2 + 298 = 700 + 300 = 1\,000$.
- $192+229+138 = 100+90+2+200+20+9+100+30+8 = 100+200+100+90+20+30+2+9+8 = 400+140+19 = 400+100+40+10+9 = 500+50+9 = 559$. Note que decompusemos $140 = 100+40$ e $19 = 10 + 9$, o que significa que **reagrupamos** 100 unidades como uma 1 centena e 10 unidades como 1 dezena. Veja a conta armada:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1} \\ 1\,9\,2 \\ 2\,2\,9 \\ +\,1\,3\,9 \\ \hline 5\,5\,9 \end{array}$$

  O 1 que "vai" para a ordem das centenas representa 1 centena que reagrupamos e o 1 que "vai" para a ordem das dezenas representa 1 dezena que também reagrupamos.

- $1\,015 + 857 = 1\,000 + 10 + 5 + 800 + 50 + 7 = 1\,800 + 60 + 12 = 1\,800 + 60 + 10 + 2 = 1\,872$. Veja a conta, "armada" no dispositivo prático da adição.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 1\,0\,1\,5 \\ +\quad 8\,5\,7 \\ \hline 1\,8\,7\,2 \end{array}$$

Justifique o "vai um" que aparece na conta.

■

Exercício 2.35 Efetue a adição

$$129 + 876,$$

usando três maneiras diferentes de fazer os cálculos.

Solução. Usando o *dispositivo prático* para organizar os cálculos, temos

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1} \\ 1\,2\,6 \\ +\quad 8\,7\,6 \\ \hline 1\,0\,0\,2 \end{array}$$

Agora, *decompondo* e *reagrupando* as parcelas, calcularemos:

$$\begin{aligned} 126 + 876 &= 100 + 20 + 6 + 800 + 70 + 6 = 100 + 800 + 20 + 70 + 6 + 6 = 900 + 90 + 12 \\ &= 900 + 90 + 10 + 2 = 900 + 100 + 2 = 1\,000 + 2 = 1\,002. \end{aligned}$$

Outra decomposição bastante adequada para essas parcelas é a seguinte:

$$\begin{aligned} 126 + 876 &= 125 + 1 + 875 + 1 = 100 + 25 + 800 + 75 + 1 + 1 \\ &= 100 + 800 + 25 + 75 + 1 + 1 = 900 + 100 + 2 = 1\,002 \end{aligned}$$

■

Exercício 2.36 Calcule as seguintes somas:

- $15+27+45+43$
- $900 + 110$
- $909 + 101$
- $99 + 1\,001$
- $9\,089 + 1\,991$

Nota ao(à) professor(a) 2.7 Continue explorando as diversas maneiras de efetuar as adições, sempre buscando desenvolver nos alunos a criatividade no uso de métodos que sejam os mais adequados (por exemplo, para simplificar os cálculos) e, ao mesmo tempo, aguçando o senso crítico de que devem justificar os algoritmos que criem ou usem em termos das propriedades da adição e do sistema posicional decimal: essas são as únicas "regras do jogo" que devem ser consideradas! A ordem de efetuar as somas, parcela a parcela, pode economizar esforços e minimizar erros como ao reagrupar

$$15 + 27 + 45 + 43 = 15 + 45 + 27 + 43 = 10 + 40 + 10 + 20 + 20 + 40 + 10 = 150.$$

Exercício 2.37 Calcule as seguintes somas:

a) $795 + 538$
b) $989 + 799$
c) $859 + 947 + 638$
d) $6\,385 + 9\,725$

e) $10\,057 + 2\,708$

Solução. Em a), temos

$$795 + 538 = 700 + 90 + 5 + 500 + 30 + 8 = 1.200 + 120 + 13 = 1.333.$$

Para efetuar a adição em b), calculamos

$$989 + 799 = 990 - 1 + 800 - 1 = 1\,790 - 2 = 1\,788.$$

Note que usamos uma subtração para efetuar uma adição! Quanto à soma em c), temos:

$$\begin{aligned} 859 + 947 + 638 &= 800 + 900 + 600 + 50 + 40 + 30 + 9 + 7 + 8 \\ &= 2\,300 + 120 + 24 = 2\,444. \end{aligned}$$

Calculamos, em d):

$$\begin{aligned} 6\,385 + 9\,725 &= 6.300 + 85 + 9\,700 + 25 = 15\,000 + 1.000 + 110 \\ &= 16\,110. \end{aligned}$$

Por fim, temos, em e):

$$10\,057 + 2\,708 = 10\,055 + 2 + 2\,708 = 10\,055 + 2\,710 = 12\,765.$$

■

Exercício 2.38 Arrendonde as parcelas e estime cada uma das seguintes somas:

- $786 + 532$
- $847 + 693$
- $853 + 976 + 638$
- $6\,384 + 9\,666$
- $10\,094 +$ $28\,367$

Em seguida, calcule os resultados exatos e compare com as estimativas que você obteve.

Nota ao(à) professor(a) 2.8 Este exercício e o seguinte são de importância central no desenvolvimento das habilidades aritméticas dos alunos: estimar os resultados das operações por aproximações e arredondamentos é uma poderosa ferramentas de cálculo no dia a dia, especialmente em cálculo mental e em ter um senso aguçado do que é *razoável*, *sensato* e *esperado* para esses resultados. Logo, estamos tratando de desenvolver atributos fundamentais para a plena **cidadania**! Por fim, essas estimativas serão essenciais para facilitar cálculos envolvendo multiplicação e divisão adiante.

Solução.
- Arredondamos 786 para 790 (aumentamos 4) e 532 para 530 (diminuímos 2), obtendo a estimativa $790 + 530 = 700 + 90 + 500 + 30 = 1\,200 + 120 = 1320$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $4 - 2 = 2$ a mais).
- Arredondamos 847 para 850 (aumentamos 3) e 693 para 700 (aumentamos 7), obtendo a estimativa $850 + 700 = 800 + 700 + 50 = 1\,550$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $3 + 7 = 10$ a mais).
- Arredondamos 853 para 850 (diminuímos 3), 976 para 980 (aumentamos 4) e 638 para 640 (aumentamos 2), obtendo a estimativa $850 + 980 + 640 = 800 + 900 + 600 + 50 + 80 + 40 = 2\,300 + 170 = 2\,470$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $4 + 2 - 3 = 3$ a mais).
- Arredondamos 6 384 para 6 400 e 9 666 para 9 700, obtendo a estimativa $6\,400 + 9\,700 = 6\,000 + 9\,000 + 400 + 700 = 15\,000 + 1\,100 = 16\,100$ para a soma (com um erro igual a 50 unidades). Para melhorar essa estimativa, consideramos os arredondamentos de 6 384 para 6 390, diminuindo 10 em relação ao arredondamento anterior. Da mesma forma, arredondamos, agora, 9 666 para 9 670, ou seja, também diminuímos 30 na primeira aproximação. Logo, a estimativa da soma passa a ser $16\,100 - 10 - 30 = 16\,060$, com um erro de apenas 10 unidades em relação ao resultado exato.

CIENTISTA CHEFE
PACTO PELA APRENDIZAGEM
MAISPAIC

- Arredondamos 10 094 para 10 100 e 28 367 para 28 400, obtendo a estimativa $10\,100+28\,400 = 38\,500$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $6+33 = 39$ a mais).

■

Exercício 2.39 Qual das alternativas abaixo melhor aproxima o resultado da adição $587\,622+421\,256$?

(a) 1 001 000 (b) 1 010 000 (c) 1 100 000 (d) 1 000 010 (e) 1 000 100

Escreva por extenso o número na alternativa escolhida.

Nota ao(à) professor(a) 2.9 Neste exercício, veremos como melhorar as estimativas da soma por meio de arredondamentos cada vez mais **precisos** das parcelas. Essa mesma técnica será de suma importância no cálculo com a expansão decimal dos números racionais e dos números reais, a serem trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental.

Solução. Começamos com uma aproximação menos precisa das parcelas: arredondamos 587 622 para 600 000 e 421 256 para 400 000, o que nos dá a estimativa de $600\,000 + 400\,000 = 1\,000\,000$ para a soma. **Refinando** as aproximações das parcelas, arredondamos, agora, 587 622 para 590 000 e 421 256 para 420 000, obtendo a estimativa de $590\,000 + 420\,000 = 900\,000 + 120\,000 = 1\,020\,000$.

Portanto, a alternativa mais próxima desta estimativa é a da letra b), pois 1 020 000 está mais próximo de 1 010 000 do que de 1 100 000. Note que uma estimativa ainda melhor seria obtida arredondando 587 622 para 587 000 e 421 256 para 421 000, obtendo a estimativa de $587\,000 + 421 = 1\,008\,000$, o que confirma a alternativa b) como correta. ■

Exercício 2.40 Separe os números abaixo em dois grupos, de modo que os números em cada grupo tenham a mesma soma:

$$11,\ 15,\ 19,\ 23$$

Exercício 2.41 Que número torna a igualdade abaixo correta?

$$37+56 = 48+\star$$

Solução. Note que

$$37+56 = 30+7+50+6 = 30+10+7+1+40+5 = 40+8+40+5 = 48+45.$$

Logo $\star = 45$. ■

Exercício 2.42 Ana tem 16 reais e Bela tem 42. Quanto uma deveria dar e a outra receber para que ficassem com a mesma quantia, em reais?

Solução. Temos

$$42 = 16+26.$$

Logo

$$42 = 16+13+13.$$

Assim, Bela deveria dar 13 reais a Ana, que ficaria com $16+13 = 29$. Com isto, Bela ficaria com $42-13 = 42-12-1 = 30-1 = 29$ reais também. ■

Nota ao(à) professor(a) 2.10 Os dois últimos exercícios mobilizam o *pensamento algébrico* nesta etapa de aprendizagem. Note que não se trata de modelar o problema usando incógnitas ou resolvendo equações, mas de explorar usos inteligentes da adição, simplesmente. O exercício seguinte é uma reformulação geométrica do exercício aritmético envolvendo a Ana e a Bela. A este propósito, veja também os exercícios 2.59 e 2.61. Observe que o intuito, além de desenvolver raciocínios algébrico-aritméticos, é introduzir a noção de **média aritmética**. Não trabalharemos esse conceito explicitamente, mas é a grande ideia que estamos começando a abordar aqui, a saber, a divisão proporcional de uma quantidade.

Exercício 2.43 Qual número fica exatamente à mesma distância de 16 e de 42?

Exercício 2.44 Marta foi à feira e comprou três quilos de carne e dois quilos de frango. Se cada quilo de carne custou R$ 25,00 e cada quilo de frango custou R$ 12,00, quanto Maria pagou pelas compras?

(a) R$ 24,00 (b) R$ 37,00 (c) R$ 75,00 (d) R$ 99,00

Exercício 2.45 A tabela seguinte demonstra o número de gols dos cinco primeiros artilheiros no Campeonato Cearense de 2021

Jogador	Clube	Número de gols
Olávio	Atlético Cearense	14
Ciel	Caucaia	8
Valdo Bacabal	Ferroviário	7
Adilson Bahia	Atlético Cearense	7
Diego Palhinha	Pacajus	4

Qual artilheiro marcou mais gols? Quem marcou menos gols? Qual o total de gols marcados pelos artilheiros?

Exercício 2.46 Nas Olimpíadas de Tóquio, Rebeca Andrade ganhou medalha de ouro na prova de salto na Ginástica, obtendo 15 083 pontos. A norte-americana Mykayla Skinner ficou com a prata (com 14 916 pontos) e a sul-coreana Seojeong Yeo levou o bronze, com 14 733 pontos. Quantos pontos, no total, as três medalhistas conseguiram nessa prova?

Exercício 2.47 Na prova de salto das Olimpíadas de Tóquio, Rebeca Andrade ganhou a medalha de prata no individual geral. Ela ficou com 15 050 pontos no salto, marcou 15 100 nas barras assimétricas e, na trave, obteve 14 000 pontos. Qual o total de pontos conseguido por Rebeca nessas três provas?

Exercício 2.48 No Dia Mundial de Limpeza de Praias, Rios e Lagoas, as professoras levaram duas turmas do 5° ano para recolher latinhas de alumínio e embalagens deixadas em uma praia próxima à escola.

Uma turma cobriu uma área de 4 225 metros quadrados e a outra, uma área de 3 844 metros quadrados. Calcule a área total em que as duas turmas recolheram os resíduos?

Exercício 2.49 — SPAECE. Em um determinado dia, a caminho da escola, Rafael comprou um estojo de lápis que custou 9 reais e um saquinho de pipoca no valor de 3 reais. Qual foi a quantia total que

Rafael gastou nesse dia a caminho da escola?

(a) 6 reais. (b) 9 reais. (c) 12 reais. (d) 27 reais.

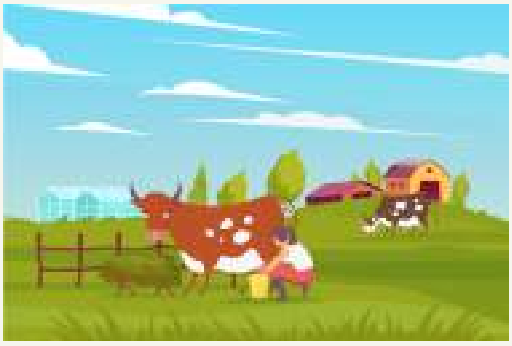
Exercício 2.50 Sem fazer contas com lápis e papel, assinale a alternativa verdadeira:

(a) 1 050 + 960 é menor que 2 000
(b) 1 382 + 2 258 termina com o algarismo 2
(c) 2 465 + 1 679 é maior que 4 100
(d) 2 119 + 1 687 termina com o algarismo 4

Exercício 2.51 Paula, Joana e Alice fizeram, respectivamente, 497, 377 e 458 pontos em um **aplicativo de Cálculo Mental**. Quantos pontos, juntas, as três meninas fizeram?

Nota ao(à) professor(a) 2.11 Sugerimos que realize uma curadoria e oriente, em sala de aula, os alunos a usarem aplicativos (gatuitos!) de cálculo aritmético disponíveis em plataformas para *smartphones*.

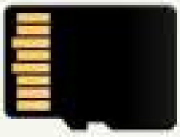
Exercício 2.52 Na semana passada, a produção de leite da Fazenda Vaquinha Feliz foi muito boa. Na segunda-feira, as vaquinhas produziram 281 litros de leite. No dia seguinte, produziram 252 litros. Já na quarta-feira, produziram 277 litros de leite.



Quantos litros de leite foram produzidos nesses três dias?

Exercício 2.53 Carlos, que tem um telefone celular com memória total interna de 128 Gigabytes (GB), comprou um cartão de memória de 64 GB. Quando Carlos inserir esse cartão no seu telefone, qual passará a ser a nova memória total interna?

(a) 128 GB.
(b) 182 GB.
(c) 192 GB.
(d) 256 GB.



Solução. Basta efetuar a adição de 128 e 64:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 128 \\ +\ 64 \\ \hline 192 \end{array}$$

Portanto, a alternativa correta é a de letra (c). ■

Exercício 2.54 João foi a uma loja e comprou um computador, um telefone celular e um relógio digital. Sabendo que esses itens custaram, respectivamente, R$ 4566,00, R$ 2733,00 e R$ 589,00, quanto João gastou nessa compra?

(a) R$ 6778,00.
(b) R$ 6788,00.
(c) R$ 6888,00.
(d) R$ 7888,00.
(e) R$ 8888,00.

Solução. Precisamos efetuar a soma de 4566, 2733 e 589:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1} \\ 4\,5\,6\,6 \\ 2\,7\,3\,3 \\ +\quad 5\,8\,9 \\ \hline 7\,8\,8\,8 \end{array}$$

Portanto, João gastou R$ 7888,00 na compra, o que indica que alternativa correta é a de letra (d). ■

Exercício 2.55 Um vendedor ambulante chegou ao final do dia e resolveu conferir suas vendas. Em dinheiro, ele recebeu R$ 1243,00 e, no cartão, recebeu R$ 985,00. Levando em conta tudo o que ele recebeu, qual o valor total das vendas?

(a) R$ 1985,00.
(b) R$ 2085,00.
(c) R$ 2143,00.
(d) R$ 2185,00.
(e) R$ 2228,00.

Exercício 2.56 Em uma pesquisa feita com crianças do 4° e 5° anos sobre seus esportes preferidos, 135 escolheram ginástica, 158 indicaram o caratê, 349 disseram preferir o futebol e 87 afirmaram que não gostam de esportes. Qual foi o número de pessoas entrevistadas nessa pesquisa?

(a) 642. (b) 709. (c) 729. (d) 730. (e) 829.

Exercício 2.57 De acordo com os dados na questão anterior, qual o maior grupo de crianças entrevistadas?

Exercício 2.58 Uma instituição vai ajudar algumas famílias, comprando *kits* de material escolar para 100 crianças. Cada *kit* é formado por uma mochila, que custa R$ 160,00, um pacote de cadernos, que custa R$ 100,00 e um pacote de lápis e canetas, que custa R$ 40,00. Quanto a instituição vai pagar por esses *kits*?

(a) R$ 200,00.
(b) R$ 2000,00.
(c) R$ 10.000,00.
(d) R$ 20.000,00.

Solução. Cada *kit* custa
$$160 + 100 + 40 = 200 \text{ reais.}$$
Como serão comprados 100 desses *kits*, o custo total é igual a
$$\underbrace{200 + 200 + \ldots + 200}_{100 \text{ vezes}} = 20000,$$

ou seja, 20 000 reais. ■

Exercício 2.59 — Canguru. A soma das idades de um grupo de cangurus é 36 anos. Daqui a dois anos, a soma dessas idades será 60 anos.

https://br.freepik.com/vetores/natureza

Quantos cangurus há no grupo?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 20 (e) 24

Solução. Para cada canguru do grupo, devemos somar 2 unidades ao número 36. Como

$$60 = 36 + 24,$$

essa soma de 2 unidades foi realizada 12 **vezes**, pois

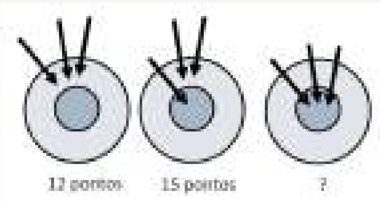
$$\underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{12 \text{ vezes}} = 24.$$

Logo, a alternativa correta é da letra b). ■

Exercício 2.60 — Canguru. Suzana tem seis anos. Sua irmã é um ano mais nova e seu irmão é um ano mais velho. Qual é a soma das idades dos três irmãos?

(a) 10 (b) 15 (c) 18 (d) 21 (e) 30

Exercício 2.61 — Canguru. Diana atirou três flechas em um alvo e conseguiu fazer 12 pontos. Na segunda vez, ela atirou três flechas e conseguiu fazer 15 pontos. Quantos pontos ela conseguiu fazer na terceira vez?



(a) 18 (b) 19 (c) 20 (d) 21 (e) 22

Solução. Note que, na primeira vez, Diana fez

$$12 = 4 + 4 + 4$$

pontos, ou seja, 4 pontos para cada uma das 3 flechas que ela acertou na parte mais externa do alvo. Na segunda vez, ela obteve 3 pontos a mais, pois passou de 12 para 15 pontos. Logo, a flecha que ela acertou na parte mais interna do alvo valia $4+3=7$ pontos. Na terceira vez, quando acertou 3 flechas nesta parte mais interna, obteve

$$7+7+7=21$$

pontos. Logo, a alternativa correta é da letra d). ■

Exercício 2.62 — Caunguru. Dados os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, Maria escolheu três números diferentes cuja soma é oito e Joana escolheu três números diferentes cuja soma é sete. Quantos números iguais as duas escolheram?

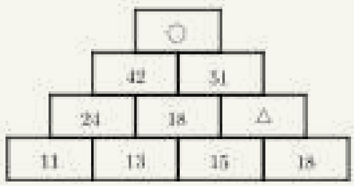
(a) nenhum
(b) um
(c) dois
(d) três
(e) impossível saber

Solução. Como Maria escolheu *três* números, não pode ter escolhido o número 8, pois não teria escolhido nenhum outro além desse. Pela mesma razão, não poderia ter escolhido 7 (pois teria que escolher apenas o 1 e o 7) nem poderia ter escolhido 6 (pois teria que escolher apenas o 2 e o 6, já que não pode repetir as escolhas, como em 1, 1 e 6). Assim, as únicas escolhas possíveis para Maria são 5, 2 e 1 ou 4, 3 e 1. Quanto à Joana, ela não poderia ter escolhido 7 nem 6 nem 5, pois precisa escolher três números diferentes. Portanto, a única escolha possível para Joana é 4, 2 e 1. Note que não poderia escolher o número 3, já que não pode repetir números.

Assim, há duas possibilidades: Maria escolhe 5, 2 e 1 e Joana escolhe 4, 2 e 1; ou Maria escolhe 4, 3 e 1 e Joana escolhe 4, 2 e 1. Em qualquer uma dessas possibilidades, há sempre dois números iguais nas escolhas de Maria e Joana: 2 e 1, no primeiro caso; 4 e 1, no segundo caso.

A alternativa correta é a da letra c). ■

Exercício 2.63 Na construção a seguir, o número escrito em cada tijolo é a soma dos dois números escritos nos tijolos abaixo dele. Por exemplo, $24=11+13$.



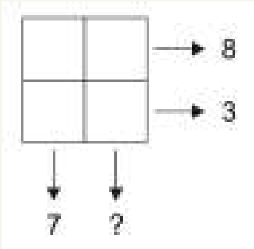
a) Determine o número que deve ser escrito no lugar do $\triangle$.
b) Qual o número deve ser escrito no lugar da $\bigcirc$?

Solução. a) Devemos ter $\triangle = 15+18=33$.
b) Devemos ter $\bigcirc = 42+51=93$. ■

Exercício 2.64 — OBMEP - Nível A. Os seis pesos da figura foram separados de dois em dois e colocados em três gavetas. Os pesos da primeira gaveta somam 9 gramas, e os pesos da segunda gaveta somam 8 gramas. Quais são os pesos da terceira gaveta?

a) 1g e 3g   b) 2g e 5g   c) 1g e 6g   d) 2g e 4g   e) 3g e 4g

Exercício 2.65 — OBMEP - Nível A. Carlos escreveu um número em cada uma das quatro casas do tabuleiro ao lado. A soma dos números escritos na primeira linha é 8, na segunda linha é 3 e na primeira coluna é 7. Qual é a soma dos números que Carlos escreveu na segunda coluna?



a) 4   b) 5   c) 6   d) 7   e) 11

Exercício 2.66 Nos dispositivos a seguir, cada símbolo é um algarismo distinto. Determine o valor de cada um deles nos diferentes itens a seguir:

a)

$$\begin{array}{rccc} & & 7 & \square \\ + & & \triangle & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rccc} & 8 & \blacksquare & 5 \\ + & \bigstar & 3 & \blacktriangle \\ \hline & 9 & 6 & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rccc} & 2 & \clubsuit & 5 \\ + & \blacklozenge & 9 & \spadesuit \\ \hline & 5 & 1 & 4 \end{array}$$

Solução. a) Para que $\square + 2 = 5$, devemos ter $\square = 3$. Como não precisamos reagrupar dezenas (não há "vai um"), temos $7 + \triangle = 11$ e, assim, $\triangle = 4$. De fato,

$$\begin{array}{rccc} & & 7 & 3 \\ + & & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 5 \end{array}$$

b) Para que $5 + \blacktriangle = 7$, devemos ter $\blacktriangle = 2$. Como não precisamos reagrupar dezenas (não há "vai um"), temos $\blacksquare + 3 = 6$ e, portanto, $\blacksquare = 3$. Finalmente, como também não é preciso reagrupar centenas (não há "vai um"), temos $8 + \bigstar = 9$ e, assim, $\bigstar = 1$. De fato,

$$\begin{array}{rccc} & 8 & 3 & 5 \\ + & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 9 & 6 & 7 \end{array}$$

c) Para $5 + \spadesuit$ termine em 4, devemos ter $\spadesuit = 9$. Com isso, reagrupamos 1 dezena ("vai um") e, assim, $1 + \clubsuit + 9$ termina em 1. Como $1 + 9 = 10$ termina em 0, devemos ter $\clubsuit = 1$. Logo, reagrupamos 1 centena ("vai um") e, finalmente, temos $1 + 2 + \blacklozenge = 5$, ou seja, $\blacklozenge = 2$. De fato,

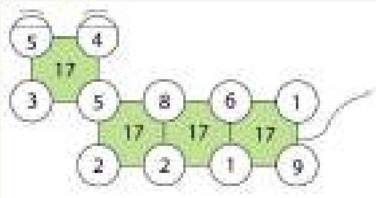
$$\begin{array}{rccc} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & 2 & 1 & 5 \\ + & 2 & 9 & 9 \\ \hline & 5 & 1 & 4 \end{array}$$

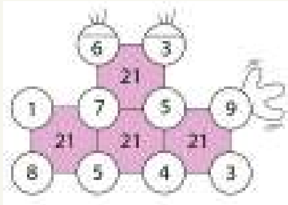
■

Exercício 2.67 — Mini-Olimpíadas Portuguesas - Adaptado. Os Quadradóides N tomam formas muito estranhas mas seguem sempre a regra:

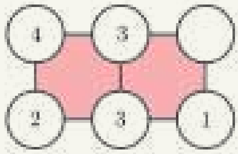
A soma dos vértices de cada um dos seus quadrados dá sempre o mesmo número N.

É o que acontece com o Quadradóide 17 e com o Quadradóide 21 das próximas imagens:



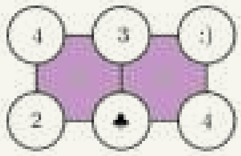


a) Considere o Quadradróide N a seguir:

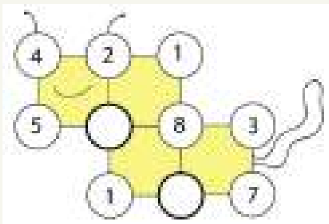


Qual número está faltando?

b) No Quadróide N a seguir, não sabemos o valor do símbolo ♣. Qual o valor do número que está na casa com o símbolo :)?



c) No Quadróide N a seguir, determine os números que estão faltando e o valor de N.



Solução. a) A soma dos números no quadrado da esquerda é $4 + 3 + 3 + 2 = 12$. Como $3 + 3 + 1 = 7$, para obtermos o número 12 somando os números do quadrado da direita, o círculo que falta precisa ser 5

b) Como os círculos do meio são comuns aos dois quadrados, as somas dos números escritos nos círculos das laterais precisam ser iguais:

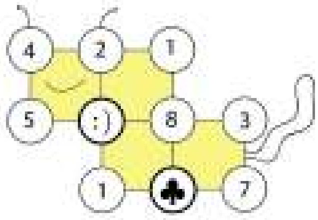
$$4 + 2 =:) + 4.$$

Daí, :) = 2.

c) Repetindo o argumento do item anterior na imagem abaixo, podemos concluir que ♣ = 2. Assim, a soma dos números no quadrado mais a direita é $8 + 3 + 2 + 7 = 20$. Sabendo que, em todos os quadrados, devemos ter a soma 20, temos

$$\begin{aligned} :) + 8 + 1 + 2 &= 20 \\ :) + 11 &= 20. \end{aligned}$$

Para obtermos 20 a partir de 11, devemos ter :) = 9.



■

Exercício 2.68 Nos quadradinhos abaixo, a soma de três números consecutivos deve ser sempre 17.

8	$\square$	$\triangle$	$\bigcirc$	5		

a) Qual o valor do número que deve ser escrito no lugar do $\bigcirc$?
b) Qual o valor do número que deve ser escrito no lugar do $\square$?
c) Qual o valor do número que deve ser escrito no lugar do $\triangle$?
d) Como completar a tabela?

Solução. a) Como

$$8+\square+\triangle = 17 = \square+\triangle+\bigcirc$$

segue que $8=\bigcirc$. Isso também nos permite concluir que duas casas que possuem dois espaços de diferença entre si devem possuir os mesmos números.

b) Como existem dois espaços entre $\square$ e 5, podemos concluir que $\square = 5$.

c) Para a que a soma dos números nas três primeiras casas seja 17, devemos ter

$$8+5+\triangle = 17,$$

ou seja, $\triangle = 4$.

d) Com os itens anteriores, podemos concluir que o tabuleiro deve ter o preenchimento:

8	5	4	8	5		

Para determinar as casas finais, como $8+5=13$, a penúltima casa deve ser 4. Finalmente, como $4+5=9$, a última casa deve ser 8. Logo,

8	5	4	8	5	4	8

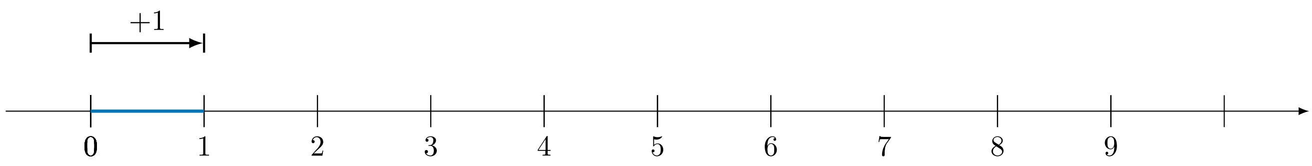
■

2.5 – Comparação, localização e arredondamento de números naturais

A sequência que começa do número 0 e sempre acrescenta uma unidade forma os **números naturais**

$$0,1,2,3,4,5,\ldots$$

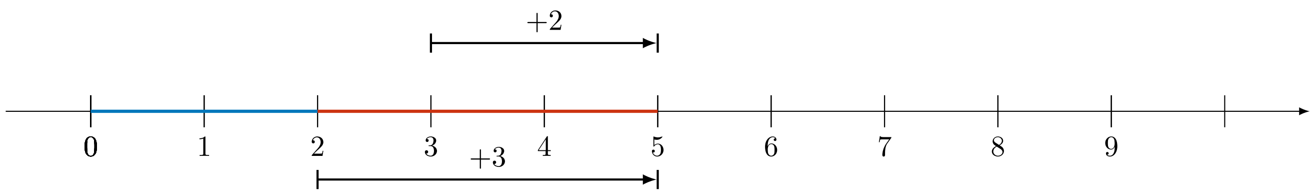
que, como você deve ter percebido, é uma sequência **infinita**. Denotamos o conjunto de números naturais por $\mathbb{N}$. Os números naturais podem ser representados geometricamente na *reta numérica*: o número 0 marca um ponto de referência na reta, chamado de *origem*. A distância entre pontos representando dois números *consecutivos* (por exemplo, 0 e 1; ou 3 e 4; ou 9999 e 10 000) é sempre igual a 1. Os pontos representando números naturais estão espaçados por intervalos de mesmo comprimento na seguinte figura:



A seta no extrema direita indica que a sequência prossegue **indefinidamente**, isto é, sem fim: seja qual for o número natural m, o número $m+1$ é também natural e é o **sucessor** de m. Por exemplo, o sucessor de 13 é $14 = 13 + 1$ e o sucessor de 889 é 990, o sucessor de 9 999 é 10 000, o sucessor de 789 448 952 815 799 é 789 448 952 815 800, e assim por diante. Na reta numérica, o sucessor de um dado número é o número que está imediatamente à sua direita.

Já o **antecessor** do número natural m, maior que 0, é o número $m-1$. Assim, 12 é o antecessor de 13, 999 é o antecessor de 1 000, e assim por diante. Na reta numérica, o antecessor de um número é o número imediatamente à sua esquerda. Todo número natural possui sucessor! A sequência dos números naturais é infinita! Além disso, com exceção do 0, todo número natural é o sucessor de outro número natural.

A adição de números naturais pode ser visualizada por meio de **deslocamentos** ou **translações** à direita na reta numérica: por exemplo, a soma dos números naturais 2 e 3 pode ser representada do seguinte modo:



Problema 8 Represente geometricamente, na reta numérica, as somas $8+6$ e $6+8$.

Desse modo, partimos do ponto 2 e deslocamos 3 unidades **para a direita**, ou partimos do ponto 3 e deslocamos 2 unidades também **para a direita**.

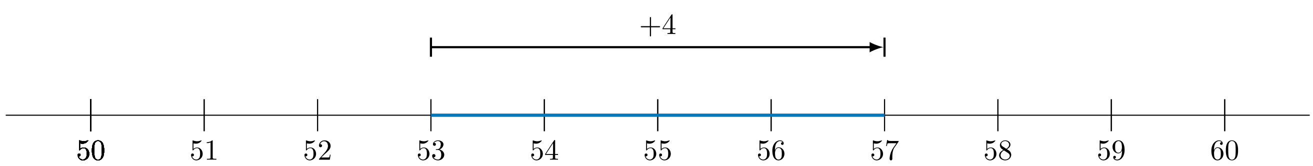
Usando a reta numérica e a ideia de **sucessão**, podemos também *comparar* e *ordenar* números naturais. Por exemplo, dizemos que 53 **é menor** que 54 e escrevemos

$$53 < 54,$$

pois $54 = 53 + 1$. Observe que 54 é o **sucessor** de 53 (ou seja, 53 é o **antecessor** de 54). Da mesma forma, escrevemos

$$53 < 57,$$

ou seja, 53 **é menor** que 57. De fato, $57 = 53 + 4$. Geometricamente,



Observe, acima, a partir da **reta numérica** na figura, que:

$$53 < 54 < 55 < 56 < 57 < \ldots$$

Esses números estão em **ordem crescente**. Nessa sequência, cada número é sucessor do número que vem logo antes.

Problema 9 Coloque os números naturais 251, 157, 135 e 153 em ordem crescente.

Para resolver o problema observe que

$$35 < 53,$$

visto que:

$$53 = 33 + 20 = 35 + 18.$$

Assim,

$$135 = 100 + 35 < 100 + 53 = 153.$$

Uma vez que $57 = 53 + 4$, temos

$$153 = 100 + 53 < 100 + 57 = 157.$$

Finalmente,

$$157 = 100 + 57 < 100 + 100 = 200 < 200 + 51 = 251.$$

Logo, a **ordem crescente** desses números é

$$135 < 153 < 157 < 251.$$

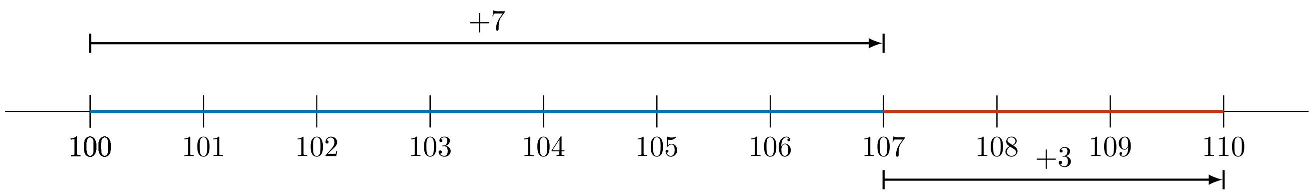
Vejamos mais um exemplo.

Problema 10 O número 107 está mais próximo de 100 ou de 110 na reta numérica?

Observamos que:

$$107 = 100 + 7 \qquad \text{e} \qquad 100 = 107 + 3.$$

Logo, 107 está 7 unidades **à direita** de 100 e 3 unidades **à esquerda** de 110 na reta numérica. Vejamos:



Deduzimos que 107 está mais próximo de 110 do que de 100. Portanto, 110 é uma **aproximação melhor** de 107 do que 100.

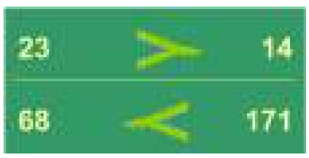
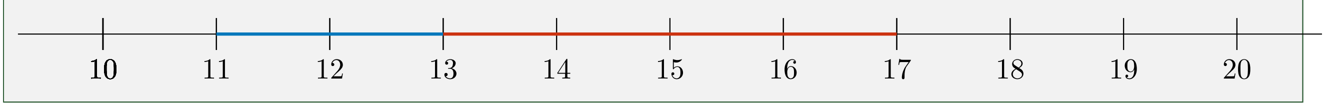


Figura 2.6: Observe a direção da boca do jacaré: o jacaré tem fome e sempre gosta de comer o maior número

O sinal $<$ significa **menor que**, como em $13 < 17$. Já o sinal $>$ significa **maior que** como em $13 > 11$. Quando escrevemos

$$11 < 13 < 17$$

dizemos que o número 13 **está entre** 11 e 17, como podemos visualizar na reta numérica:



Arredondamentos e Estimativas

Estimar e arrendondar são recursos importantes para o cálculo mental e, em geral, para o uso das operações aritméticas no cotidiano e em vários contextos. Vejamos alguns exemplos.

Problema 11 Qual a unidade de milhar mais próxima de 7 853? E quais as centenas mais próximas deste número?

Observe que 7 853 **está entre** 7 000 e 8 000, ou seja,

$$7\,000 < 7\,853 < 8\,000.$$

No entanto, veja que 7 853 está mais próximo de 8 000 do que de 7 000. De fato, 7 853 são 78 centenas e 53 unidades. Logo, está mais próximo de 80 centenas, ou seja, de 8 milhares.

Para que possamos entender melhor estes arredondamentos, estudremos mais um probleminha.

Problema 12 A área do Estado do Ceará é (aproximadamente) igual a 148 894 quilômetros quadrados. Arredonde este número para:

- a centena de milhar mais próxima;
- as dezenas de milhar mais próximas;
- as unidades de milhar mais próximas.

Observe que

$$100\,000 < 148\,894 < 200\,000.$$

Como 148 894 está mais próximo de 100 000 (**por que**?), concluímos que este número é aproximado por 1 centena de milhar. Para *melhorar* essa aproximação, observe, agora, que

$$140\,000 < 148\,894 < 150\,000.$$

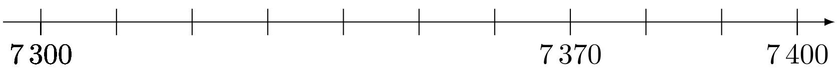
Logo, 148 894 é mais próximo de 150 000, ou seja, mais próximo de 15 dezenas de milhar. Para uma aproximação ainda melhor, observamos que

$$148\,000 < 148\,894 < 149\,000,$$

Portanto, 148 894 está mais próximo de 149 000, ou seja de 149 unidades de milhar.

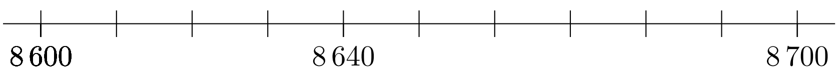
Problema 13 Arredonde os números 7 370 e 8 640 para a centena mais próxima.

Solução. O número $7\,370 = 7\,300 + 70$ é **maior** que 7 300 e **menor** que 7 400, como representado na *reta numérica* abaixo:



Vemos, portanto, que 7 370 **está entre** 7 300 e 7 400, mas **mais próximo** de 7 400.

Da mesma forma, o número $8\,640 = 8\,600 + 40$ é **maior** que 8 600 e **menor** que 8 700, estando mais próximo de 8 600 do que de 8 700, como ilustrado na seguinte reta numérica:



Concluímos que 7 370 é arredondado para 7 400 ou 74 centenas e 8 640 é arredondado para 8 600 ou 86 centenas. ■

Problema 14 Estime a soma $7\,370 + 8\,640$ para a centena mais próxima.

Solução. Como vimos arredondamos 7 370 para 7 400 e 8 640 para 8 600. Daí, a soma é *estimada* para

$$7\,400 + 8\,600 = 15\,000 + 1\,000 = 16\,000,$$

ou seja, 160 centenas. Para determinar o erro desta estimativa, veja que o valor exato da soma é 16 010. Logo, o erro é de 10 unidades. ■

A aplicação prática de estimativas e arredondamentos pode ser associada ao último exercício da seguinte maneira. Uma família pretende fazer uma reforma em casa, os materiais custam 7 370 reais e a mão de obra 8 640 reais. Avaliar a possibilidade financeira de fazer uma reforma se reside nas casas do milhar, e não na casa das dezenas. Desse modo, com uma estimativa e cálculos mentais mais simples é possível que a família pondere se é possível fazer a reforma.

2.6 – Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 2.69 Use um dos sinais $<$ (menor que) ou $>$ (maior que) para obter as desigualdades corretas

- 1011 ___ 1001
- 897 ___ 936
- 3 405 ___ 3 394
- 9 998 ___ 10 001
- 30 976 ___ 31 004
- 101 111 ___ 110 001

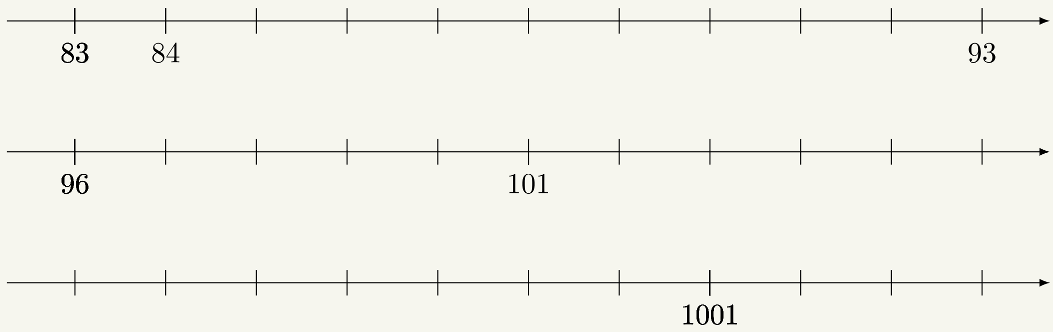
Exercício 2.70 Faça os seguintes arredondamentos:

- 347 é arredondado para ______ centenas.
- 347 é arredondado para ______ dezenas.
- 687 é arredondado para 1 ________________.
- 1 873 é arredondado para ______ milhares.
- 1 873 é arredondado para ______ centenas.
- 77 852 é arredondado para 1 ________________.
- 77 852 é arredondado para ______ milhares.

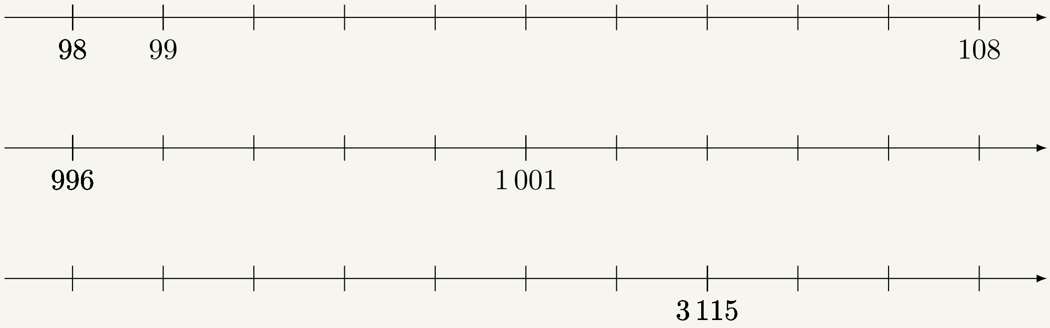
Exercício 2.71 Coloque os seguintes números em **ordem crescente** usando, entre eles, o sinal $<$.

76 840 70 864 70 468 68 074 78 064 48 760

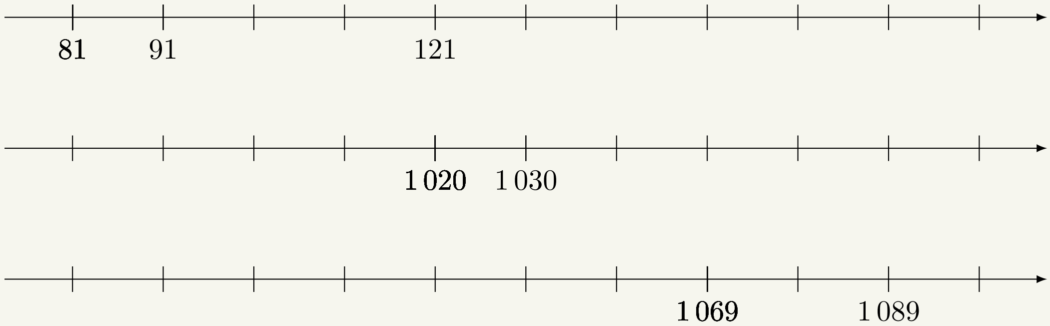
Exercício 2.72 A distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas é de 1 unidade. Sendo assim, indique os números correspondentes a essas marcações:



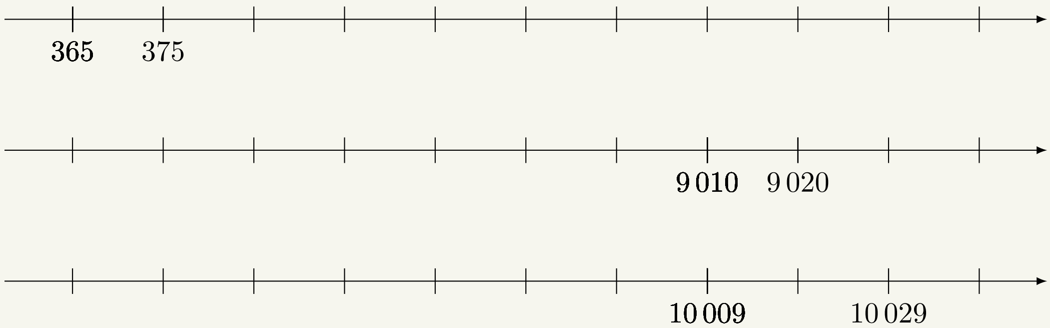
Exercício 2.73 A distância entre duas marcações consecutivas na reta numérica é de 1 unidade. Sendo assim, indique as marcações correspondentes aos números 105, 1 004 e 3 110, respectivamente, nas retas numéricas a seguir.



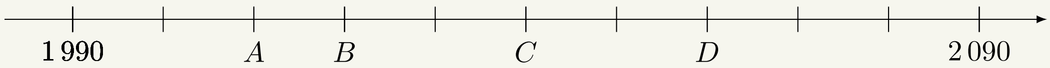
Exercício 2.74 Agora, suponha que a distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas é de 10 unidades. Sendo assim, indique os números correspondentes a essas marcações:



Exercício 2.75 Continue supondo que a distância entre duas marcações consecutivas nas retas numéricas é de 10 unidades. Sendo assim, indique as marcações correspondentes aos números 405, 8 090 e 9 999, respectivamente, nas retas numéricas a seguir.



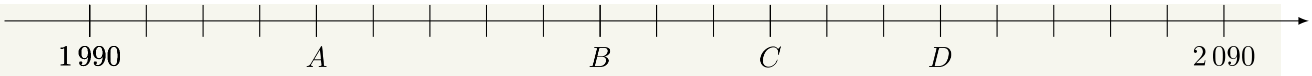
Exercício 2.76 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.



A letra que indica a localização do número 2 040 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

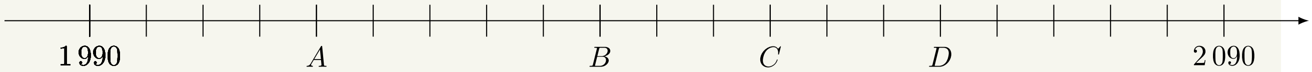
Exercício 2.77 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.



A letra que indica a localização do número 2 035 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

Exercício 2.78 Na reta numérica, as letras indicam a localização de alguns números.



A letra que indica a ponto **mais próximo** da localização do número 2 048 nessa reta numérica é

a) A b) B c) C d) D

Exercício 2.79 O professor Jorge do 5° ano pediu para que o aluno Lira marcasse numa linha do tempo o ano de 1980.

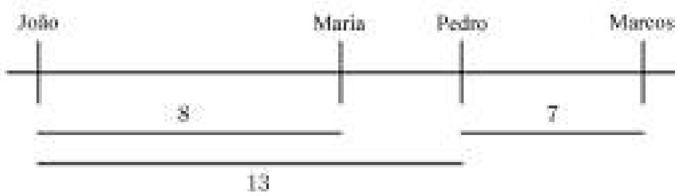
Que ponto Lira deve marcar?

a) A
b) B
c) C
d) D

Solução. Como existem 9 marcas igualmente espaçadas entre os anos de 1900 e 2000, o período entre duas marcas consecutivas deve indicar 10 anos. O ano de 1980 deve ser indicado pela letra A, pois ele está marcado após 8 espaços de 10 anos do número 1900. ■

Exercício 2.80 João, Maria, Pedro e Marcos estão em uma fila. João é o primeiro, que fica na posição mais à esquerda, e Marcos é o último, que fica na posição mais à direita. Entre João e Maria existem 8 pessoas, entre Pedro e Marcos 7 pessoas e, finalmente, entre Pedro e João 13 pessoas.

a) Determine se Maria está à direita ou à esquerda de Pedro.
b) Determine quantas pessoas estão entre Maria e Pedro.

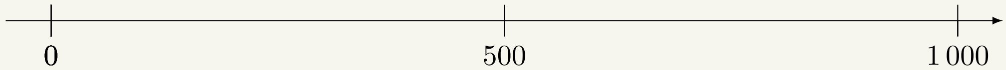


Solução. a) Se Pedro estivesse à esquerda de Maria, entre ela e João deveríamos ter pelo menos o número de pessoas entre Pedro e João. Isso não ocorre porque $8 < 13$ e assim Maria está à esquerda de Pedro.

b) Em virtude do item anterior, a ordem entre as pessoas é: João, Maria, Pedro e Marcos. Se João for associado ao número 1 de uma reta, Maria estará associada ao número $1 + 8 = 9$ e Pedro estará associado ao número $1 + 13 = 14$. Entre os números 9 e 14, existem 5 números naturais, a saber: 10, 11, 12, 13 e 14. Logo, correspondendo a esses 5 números, existem 5 pessoas entre Maria e Pedro.

■

Exercício 2.81 Localize, na reta numérica, os números 290, 90, 700, 910.



Em qual das ordens ficarão esses números?

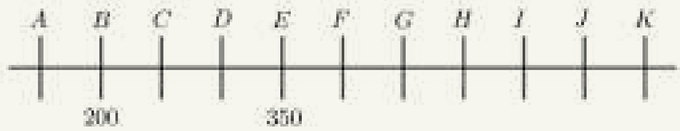
a) 0, 90, 500, 700, 910 e 1000
b) 0, 290, 700, 500, 90, 910 e 1000
c) 0, 290, 910, 90, 500, 700 e 1000
d) 0, 90, 290, 500, 700, 910 e 1000

Solução. Dos números da lista, 90 e 290 são menores que 500, portanto devem ficar à sua esquerda. Além disso, 90 é menor que 290 e deve ficar à sua esquerda. Os outros dois números devem ficar à direita de 500 e à esquerda de 1000. Como 700 é menor que 910, deve ficar à sua esquerda. Portanto, a ordem correta entre eles é:

$$0 < 90 < 290 < 500 < 700 < 910 < 1000.$$

A opção d) é a correta. ■

Exercício 2.82 Na reta numérica a seguir, estão localizados vários pontos. O ponto B representa o número 200 e o ponto E representa o número 350. Sabendo que a diferença entre o valor de um ponto e o valor de outro ponto consecutivo é de 50 unidades, em qual ponto estará localizado o número 550?



a) F.
b) H.
c) I.
d) J.

Solução. As próximas marcas após o número 350 são: $F = 400$, $G = 450$, $H = 500$ e $I = 550$. A resposta correta está na letra c). ■

Exercício 2.83 Bernardo costuma colher laranjas em um pomar de formato triangular, como representado abaixo. Os números representam a quantidade de frutos em cada uma das árvores. Ele quer descobrir qual caminho deve fazer, partindo da laranjeira mais alta e chegando até a última linha, apenas seguindo direções inferior esquerda ou inferior direita e de maneira a colher o maior número de laranjas possível. Por exemplo, no pomar abaixo, o caminho com números destacados (de outra cor) é o que apresenta a maior colheita e tem soma $3 + 7 + 4 + 9 = 23$.

Considerando agora o pomar a seguir, qual o caminho que tem mais laranjas? (Pinte de vermelho os números do caminho que você encontrar).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 8 & & & & \\
 & & & 7 & & 8 & & & \\
 & & 7 & & 5 & & 1 & & \\
 & 5 & & 2 & & 4 & & 2 & \\
2 & & 2 & & 3 & & 7 & & 9
\end{array}
$$

Solução. O diagrama a seguir ilustra o melhor caminho. Uma estratégia é escolher de uma linha para a próxima sempre a laranjeira com a maior quantidade de laranjas. É possível comparar a soma

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 8 & & & & \\
 & & & 7 & & 8 & & & \\
 & & 7 & & 5 & & 1 & & \\
 & 5 & & 2 & & 4 & & 2 & \\
2 & & 2 & & 3 & & 7 & & 9
\end{array}
$$

indicada com várias outras somas do diagrama como, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
8+7+7+2+3 &= 27 \\
8+8+1+2+9 &= 28.
\end{aligned}
$$

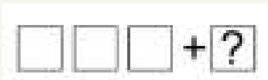
A soma (caminho) com a maior quantidade de laranjas é $8+8+5+4+7=32$. ■

Exercício 2.84 — Canguru - 2014. Gina quer acrescentar o algarismo 3 ao número 2014 de forma que o número de cinco algarismos resultante seja o menor possível. Onde ela deve colocar o algarismo 3?

a) Entre 2 e 0.
b) À esquerda de 2.
c) Entre 0 e 1.
d) À direita de 4.
e) Entre 1 e 4.

Solução. Podemos escrever o algarismo 3 em cinco posições diferentes: na dezena de milhar, obtendo o número 32 014; na unidade de milhar, obtendo 23 014; nas centenas, obtendo o número 20 314; nas dezenas, escrevendo 20 134; ou, enfim, nas unidades, obtendo 20 143. O menor dos números obtidos é 20 134. Portanto, o algarismo 3 deve ser colocado na posição entre 1 e 4. ■

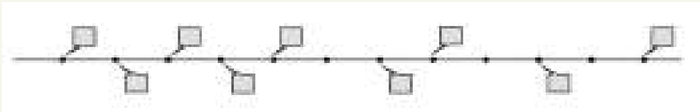
Exercício 2.85 — Canguru - 2019. Os algarismos 2, 0, 1 e 9 devem ser escritos nos quadradinhos da soma a seguir, de tal forma que o resultado seja o maior possível. Cada quadradinho deve ter somente um algarismo. Qual deve ser o algarismo a ser escrito no quadradinho com o ponto de interrogação?



Solução. Temos que somar um número de três algarismos com um número de um algarismo usando exatamente os quatro algarismos 2, 0, 1, 9. O número de três algarismos é maior quanto maior for o algarismo da centena, depois o da dezena. O algarismo 9 deve estar na centena do número de três algarismos, bem como o 2 deve estar na dezena. Podemos ter alguma dúvida sobre o número que fica nas casas com unidades, porque temos duas casas de unidades. Como $920+1=921$ e $921+0=921$, concluímos que, no quadradinho com o ponto de interrogação, podemos escrever tanto o 0 quanto o 1. ■

Exercício 2.86 — Adaptado da OBM 2012. Na reta indicada abaixo, os pontos numerados com balõezinhos representam números inteiros consecutivos, todos maiores que 93 e menores que 112, escritos em ordem crescente, ou seja, um número menor fica à esquerda de um número maior. Exatamente três dos números marcados estão na lista:

$$96, 100, 104 \text{ e } 108.$$



a) Explique por que o número mais à esquerda não pode ser o 94.
b) Explique por que o número mais à esquerda não pode ser nenhum número da lista: 95, 96, 98, 99 e 100.
c) Qual é o maior dos números indicados?

Solução. a) Se iniciarmos com o 94 no primeiro ponto, apenas 96 e 100 ficam marcados com balõezinhos e isso não pode ocorrer pelo enunciado.
b) O mesmo ocorre quando iniciamos com o 95 (neste caso, 96 e o 104 ficam marcados com balõezinhos), com 96 (neste caso, 96 e o 100 ficam marcados), com o 98 (sendo assim, o 100 e o 104 ficam marcados), com o 99 (sendo assim, ficam marcados 100 e o 108) e o 100 (neste caso, 100 e o 104 é que ficam marcados).
c) Pelo item anterior, a única opção é iniciar com o 97 para termos três números da lista do enunciado marcados com balõezinhos (neste caso, os números marcados são o 100, o 104 e o 108). Portanto, o maior dos números indicados é o 108.

■

Exercício 2.87 João e Maria estão bricando de misturar algarismos de dois números. A brincadeira funciona da seguinte forma: João escolhe um número de 4 algarismos e Maria um de 2 algarismos. Em seguida, Maria deve formar o maior número possível, misturando os algarismos desses dois números, mas sem mudar a ordem entre cada um dos escolhidos. Por exemplo, se João escolheu 5654 e Maria escolheu **75**, então o maior número possível que ela pode formar é **7**565**5**4. Agora eles mudaram de números:

(a) João escolheu 9760 e Maria o 85. Qual o número de 6 algarismos Maria irá formar?
(b) João escolheu 3735 e Maria o 52. Qual o número de 6 algarismos Maria irá formar?

Solução. Para criar o maior número, o algarismo das dezenas do número de Maria deve ser inserido à esquerda dos algarismos do número de João que são menores que ele e o algarismo das unidades mais à direita dos algarismos que são maiores que ele. Assim, Maria formou os números:

a) 987650.
b) 537352.

■

2.7 – Os algoritmos para subtração

Em uma subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

A seguir, usamos alguns exemplos para recordar os dois algoritmos mais comuns para subtrações. Calculamos, como nosso primeiro exemplo, a diferença $369 - 153$:

$$\begin{aligned} 369 - 153 &= 300 + 60 + 9 - (100 + 50 + 3) \\ &= 300 + 60 + 9 - 100 - 50 - 3 \\ &= 300 - 100 + 60 - 50 + 9 - 3 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Observe que

$$\text{diferença} + \text{subtraendo} = \text{minuendo}.$$

Em nosso exemplo, temos

$$216 + 153 = 200 + 10 + 6 + 100 + 50 + 3 = 300 + 60 + 9 = 369.$$

Essas manipulações podem ser organizadas de modo mais simples com o seguinte *dispositivo prático* para a subtração:

$$\begin{array}{r} 3\ 6\ 9 \\ -\ 1\ 5\ 3 \\ \hline 2\ 1\ 6 \end{array}$$

Observe que, na prática, subtraímos 3 unidades das 9 unidades, 5 dezena das 6 dezenas e 1 centena das 3 centenas, ficando com a diferença ou resto de 6 unidades, 1 dezena e 2 centenas, ou seja, 62+10+200=216.

Caso a diferença fosse $373 - 157$, teríamos o mesmo resultado, já que acrescentaríamos 4 unidades ao minuendo (373=369+4) e também 4 unidades ao subtraendo (157=153+4). Vejamos, todavia, como obter esse resultado de outros modos. Para começar, usamos a técnica de **reagrupamento** ou **decomposição**. Vejamos

$$\begin{aligned} 373 - 157 &= 300 + 70 - 3 - (100 + 50 + 7) \\ &= 300 + 70 + 3 - 100 - 50 - 7 \\ &= 300 + 60 + 10 + 3 - 100 - 50 - 7 \\ &= 300 - 100 + 60 - 50 + 13 - 7 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Podemos apresentar essas contas “armando” os cálculos no seguinte dispositivo:

$$\begin{array}{lr} & 300 + 70 + 3 \\ - & 100 + 50 + 7 \\ \hline & 200 + 20 + 13 \\ - & 10 + 7 \\ \hline & 200 + 10 + 6 \end{array}$$

De modo mais sucinto, escrevemos

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 13} \\ & 3 & \cancel{7} & \cancel{3} \\ - & 1 & 5 & 7 \\ \hline & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

Usualmente, as pessoas se referem a esse algoritmo como equivalente a "tomar emprestado": a dezena que "tomamos emprestado", de fato, está na decomposição do minuendo 373. Com esta decomposição de $300 = 300 + 70 + 3$ em $300 + 60 + 13$ (reagrupamento de 1 dezena como 10 unidades na coluna das unidades). Outra maneira de fazer a subtração acima é *por composição*, como descrevemos agora. Temos

$$\begin{aligned} 373 - 157 &= 300 + 70 - 3 - (100 + 50 + 7) \\ &= 300 + 70 + 10 + 3 - 100 - 50 - 10 - 7 \\ &= 300 + 70 + 13 - 100 - 60 - 7 \\ &= 300 - 100 + 70 - 60 + 6 \\ &= 200 + 10 + 6 \\ &= 216. \end{aligned}$$

Reescrevendo as contas no dispositivo prático, obtemos:

$$\begin{array}{rccc} & 3 & 7 & {}^{1}3 \\ - & 1 & {}^{1}5 & 7 \\ \hline & 2 & 1 & 6 \end{array}$$

No dispositivo acima, somamos 10 unidades ao minuendo e também 10 unidades ao subtraendo, o que não altera o resultado da subtração. Desse modo, o minuendo passar a ter 13 unidades em vez de apenas 3. Do mesmo modo, o subtraendo passa a ter 6 dezenas em vez das 5 iniciais. Subtraímos, enfim, 7 unidades das 13, 6 dezenas das 7 e 1 centena das 3 centenas, obtendo $6 + 10 + 200 = 216$ unidades.

Finalizamos a seção com dois probleminhas, para fixarmos e, ao mesmo tempo, aplicarmos esses conceitos e técnicas da subtração.

> **Problema 15** Quanto dinheiro falta a João para comprar uma motoneta no valor de R\$ 10 590,00, sabendo que ele já conseguiu poupar R\$ 6 380,00?

Solução. O problema consiste em *resolver* a seguinte situação

$$6\,380 + \text{ quantia que falta} = 10\,590.$$

Para encontrar a quantia que falta, calculamos a *diferença*

$$10\,590 - 6\,380$$

entre o valor da motoneta e a quantia que João tem atualmente. Decompondo as parcelas e reagrupando os componentes, calculamos

$$\begin{aligned} 10\,590 - 6\,380 &= 10\,000 + 500 + 90 - 6.000 - 300 - 80 \\ &= 10\,000 - 6\,000 + 500 - 300 + 90 - 80 \\ &= 4\,000 + 200 + 10 \\ &= 4\,210. \end{aligned}$$

Em uma subtração, um certo número (o *subtraendo*) é retirado de um número maior (o *minuendo*), deixando um *resto* ou *diferença*:

$$\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{resto ou diferença}.$$

Para visualizar e organizar melhor essas manipulações, as escrevemos da seguinte forma, que vemos na escola:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 5 & 9 & 0 \\ - & & 6 & 3 & 8 & 0 \\ \hline & & 4 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

Observe que, somando a quantia que falta ao que João já poupou, obtemos a quantia total desejada, ou seja, o valor da motoneta, isto é,

$$6\,380 + 4\,210 = 10\,590,$$

ou seja

subtraendo + resto ou diferença = minuendo.

Nesse exemplo, subtraímos unidades das unidades, dezenas das dezenas, centenas das centenas, e assim por diante. ■

Problema 16 Para pagar uma reforma urgente em casa, João gastou R$ 1 190,00 de sua poupança de R$ 6 380,00. Com quanto ficou?

Solução. Aqui temos uma situação diferente: para resolver esse problema, precisamos *subtrair* ou retirar 1 190 reais dos 6 380 reais que João já poupara, isto é,

$$6\,380 - 1\,190,$$

obtendo o valor que *resta* na poupança de João após essas despesas com a reforma. “Armando” a conta como aprendemos na escola, temos:

$$\begin{array}{rcccc} & & \scriptstyle 2 & \scriptstyle 18 & \\ & 6 & \cancel{3} & \cancel{8} & 0 \\ - & 1 & 1 & 9 & 0 \\ \hline & 5 & 1 & 9 & 0 \end{array}$$

■

2.8 – Exercícios resolvidos e propostos

Exercício 2.88 Calcule as seguintes diferenças:

- $75 - 23$
- $75 - 52$
- $75 - 56$
- $75 - 19$
- $85 - 29$

Solução. Utilizemos as propriedades da adição para fazermos os cálculos.

- $75 - 23 = 70 + 5 - 20 - 3 = 70 - 20 + 5 - 3 = 50 + 2 = 52.$
- $75 - 52 = 70 + 5 - 50 - 2 = 70 - 50 + 5 - 2 = 20 + 3 = 23.$ Note que essas duas contas são complementares, pois 23 e 52 são **parcelas** (somandos) de 75, isto é,

$$23 + 52 = 52 + 23 = 75.$$

- $75-56 = 70+5-50-6 = 60+10+5-50-6 = 60-50+10+5-6 = 60-50+15-6 = 10+9 = 19.$ Note que decompusemos $70 = 60 + 10$ para **reagrupar** essas 10 unidades junto às 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 6 unidades. Esse reagrupamento (ou “reserva”) pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{rcc} & \scriptstyle 6 & \scriptstyle 15 \\ & \cancel{7} & \cancel{5} \\ - & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 9 \end{array}$$

Dessa forma, ao decompor 70 em $60 + 10$, ficamos com 6 dezenas na ordem das dezenas e, com isto, subtraímos $15 - 6 = 9$.

- $75-19 = 70+5-10-9 = 60+10+5-10-9 = 60-10+10+5-9 = 60-10+15-9 = 50+6 = 56.$ Note que decompusemos $70 = 60+10$ para **reagrupar** essas 10 unidades junto às 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 9 unidades. Esse reagrupamento (ou “reserva”) pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 6\ 15} \\ \cancel{7}\,\cancel{5} \\ -\,1\,9 \\ \hline 5\,6 \end{array}$$

Observe, ainda, que os dois últimos resultados são complementares, pois

$$19+56 = 56+19 = 75.$$

Outra estratégia para calcular a diferença $75-19$ é fazermos

$$75-19 = 75-20+1 = 55+1 = 56.$$

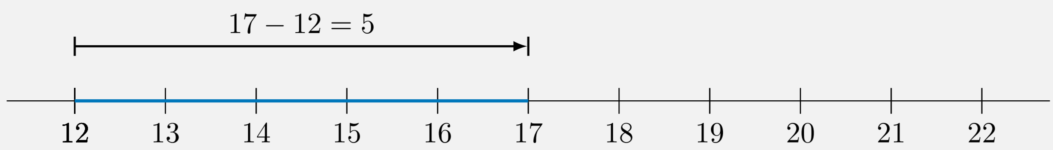
- Usamos o resultado anterior para calcularmos

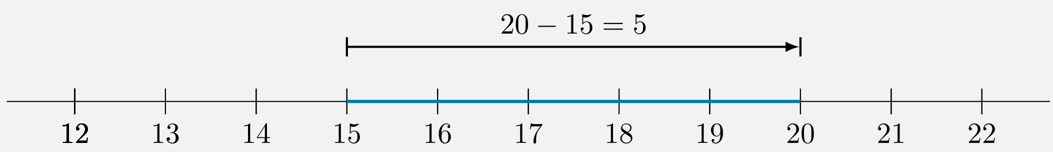
$$85-29 = 75+10-19-10 = 75-19+\cancel{10}-\cancel{10} = 75-19 = 56,$$

ou seja, uma vez que adicionamos 10 unidades a 75 e, também, adicionamos 10 unidades a 19, a diferença entre 85 e 29 é a mesma que entre 75 e 19.

■

A imagem seguinte demonstra que a subtração de dois números pode ser entendida como a **distância** entre os pontos na reta numérica que representam estes números:





Note que a distância entre os pontos 17 e 12 é igual a 5 unidades, ou seja, ao comprimento de 5 intervalos na reta numérica, cada um com comprimento igual a 1. Uma vez que $20 = 17+3$ e $15 = 12+3$, o segmento de reta ligando 12 a 17 foi **transladado para a direita** 3 unidades. O segmento foi transladado e seu comprimento permaneceu *igual*. Isso pode ser vista também nas seguintes contas:

$$20-15 = 17+3-12-3 = 17-12+\cancel{3}-\cancel{3} = 17-12 = 5.$$

Exercício 2.89 Calcule as seguintes somas:

- $785-273$
- $785-276$
- $805-541$
- $805-547$
- $1\,005-768$

Solução. Utilizemos as propriedades da adição e subtração para fazermos os cálculos.

- $785 - 273 = 700 + 80 + 5 - 200 - 70 - 3 = 700 - 200 + 80 - 70 + 5 - 3 = 500 + 10 + 2 = 512.$
- $785-276 = 700+80+5-200-70-6 = 700+70+10+5-200-70-6 = 700-200+70-70+15-6 = 500 + 9$. Note que decompusemos $80 = 70 + 10$ para **reagrupar** essas 10 unidades junto às 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 9 unidades. Esse reagrupamento (ou "reserva") pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{rccc} & & 7 & 15 \\ & 7 & \cancel{8} & \cancel{5} \\ - & 2 & 7 & 6 \\ \hline & 5 & 0 & 9 \end{array}$$

em que, ao decompor 80 em $70 + 10$, ficamos com 7 dezenas na ordem das dezenas e, com isto, subtraímos $15 - 6 = 9$. Este resultado poderia, também, ser facilmente obtido a partir do anterior, pois
$$785 - 276 = 785 - 273 - 3 = 512 - 3 = 509.$$

- $805-541 = 800+5-500-40-1 = 700+100+5-500-40-1 = 700-500+100+5-40-1 = 200+60+4$. Note que decompusemos $800 = 700 + 100$ para **reagrupar** essas 100 unidades junto as 5 unidades que já tínhamos e, assim, podermos subtrair as 41 unidades. Este reagrupamento (ou "reserva") pode ser visualizado no seguinte *dispositivo prático*

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 100 & \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & 5 \\ - & 5 & 4 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 4 \end{array}$$

em que, ao decompor 800 em $700 + 100$, ficamos com 7 centenas na ordem das centenas e, com isto, subtraímos $100 - 40 = 60$.
- Usando o resultado anterior, temos $805 - 547 = 805 - 541 - 6 = 264 - 6 = 264 - 4 - 2 = 258$. Podemos calcular essa diferença diretamente, usando o método da **compensação** como segue:

$$\begin{aligned} 805 - 547 &= 800 + 5 - 500 - 40 - 7 \\ &= 800 + 100 + 5 - 500 - 100 - 40 - 7 \\ &= 800 - 500 - 100 + 100 + 5 - 40 - 7 \\ &= 200 + 98 + 2 + 5 - 40 - 7 \\ &= 200 + 98 - 40 + 7 - 7 \\ &= 200 + 58 \\ &= 258. \end{aligned}$$

Veja a conta, "armada" no dispositivo prático da adição.

$$\begin{array}{r} 8\,{}^{1}0\;5 \\ -{}^{1}5\;4\;7 \\ \hline 2\;5\;8 \end{array}$$

- Utilizamos, agora, outra forma de **compensação**:

$$\begin{aligned} 1\,005 - 768 &= 1\,000 + 5 - 700 - 68 \\ &= 1\,000 + 70 + 5 - 700 - 70 - 68 \\ &= 1\,000 - 700 - 70 + 70 + 5 - 68 \\ &= 300 - 70 + 2 + 5 \\ &= 230 + 7 \\ &= 237. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.90 Efetue a subtraão

$$1\,002 - 876,$$

usando quatro maneiras diferentes de fazer os cálculos.

Solução. Usando o *dispositivo prático* para organizar os cálculos, temos:

$$\begin{array}{rcccc} & \scriptstyle 0 & \scriptstyle 900 & \scriptstyle 100 & \\ & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 \\ - & & 8 & 7 & 6 \\ \hline & & 1 & 2 & 9 \end{array}$$

Agora, *decompondo* e *reagrupando* as parcelas, calculamos:

$$\begin{aligned} 1\,002 - 876 &= 1\,000 + 2 - 800 - 70 - 6 = 900 + 100 + 2 - 800 - 70 - 6 = 900 - 800 + 100 + 2 - 70 - 6 \\ &= 100 + 90 + 10 + 2 - 70 - 6 = 100 + 90 - 70 + 12 - 6 = 100 + 20 + 6 = 126. \end{aligned}$$

Outra decomposição bastante adequada para essas parcelas é a seguinte:

$$\begin{aligned} 1\,002 - 876 &= 900 + 90 + 12 - 875 - 1 = 900 - 875 + 90 + 12 - 1 \\ &= 25 + 90 + 11 = 25 + 100 + 1 = 125 + 1 = 126. \end{aligned}$$

Por fim, utilizemos o método da compensação do seguinte modo:

$$\begin{aligned} 1\,002 - 876 &= 1\,000 + 2 - 800 - 70 - 6 = 1\,000 + 100 + 2 - 800 - 100 - 70 - 6 \\ &= 1\,000 - 800 - 100 + 100 + 2 - 70 - 6 = 100 + 100 + 2 - 70 - 6 \\ &= 100 + 100 - 10 + 2 - 70 + 10 - 6 = 100 + 92 - 70 + 10 - 6 = 100 + 22 + 4 = 126. \end{aligned}$$

■

Exercício 2.91 Calcule as seguintes diferenças:

(a) $1\,333 - 538$
(b) $1\,333 - 795$
(c) $1\,768 - 989$
(d) $10\,010 - 8\,999$
(e) $110\,010 - 101\,111$

Solução. Calculamos a diferença em a) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 1\,333 - 538 &= 1\,300 + 33 - 500 - 38 = 1\,300 - 500 - 38 + 33 \\ &= 800 - 5 = 795. \end{aligned}$$

Quanto às operações em b), temos, usando o "método do reagrupamento" (ou da decomposição):

$$\begin{aligned} 1\,333 - 795 &= 1\,300 + 30 + 3 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1\,300 + 20 + 13 - 700 - 90 - 5 \\ &= 1\,200 + 100 + 20 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1\,200 + 120 - 700 - 90 + 8 \\ &= 1\,200 - 700 + 30 + 8 = 500 + 30 + 8 = 538. \end{aligned}$$

Observe que as contas em a) e b) comprovam que $795 + 538 = 1\,333 = 538 + 795$, como já sabíamos do exercício anterior.

Passando ao cálculo da diferença em c), podemos usar o “método da compensação” (ou da composição):

$$\begin{aligned}
1\,768 - 989 &= 1\,700 + 60 + 8 - 900 - 80 - 9\\
&= 1\,700 + 60 + 10 + 8 - 900 - 80 - 10 - 9\\
&= 1\,700 + 60 + 9 - 900 - 80 - 10\\
&= 1\,700 + 100 + 60 + 9 - 900 - 100 - 90\\
&= 1\,700 + 70 + 9 - 900 - 100\\
&= 1\,700 - 1\,000 + 70 + 9 = 779.
\end{aligned}$$

Agora, a diferença em d) pode ser mais facilmente calculada com a seguinte estratégia:

$$\begin{aligned}
10\,010 - 8\,999 &= 10\,010 - 9\,000 + 1 = 10\,000 + 10 - 9\,000 + 1\\
&= 1\,000 + 11 = 1\,011.
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos

$$\begin{aligned}
110\,010 - 101\,111 &= \cancel{100\,000} + 10\,000 + 10 - \cancel{100\,000} - 1\,000 - 111\\
&= 9\,000 + 10 - 100 - 11 = 8\,900 + 10 - 11 = 8\,900 - 1 = 8\,899.
\end{aligned}$$

■

Nota ao(à) professor(a) 2.12 Encorajamos o(a) professor(a), neste ponto, a propor várias possíveis estratégias, utilizando ou não os algoritmos corriqueiros de subtração. Por exemplo, para efetuar a subtração em a), podemos recorrer à “tomada de empréstimo” (isto é, à decomposição e reagrupamento), calculando

$$\begin{aligned}
1\,333 - 538 &= 1\,300 + 33 - 500 - 38 = 1\,290 + 10 + 33 - 500 - 38\\
&= 1\,200 - 500 + 90 + 43 - 38 = 1\,200 - 500 + 90 + 5\\
&= 700 + 90 + 5 = 795.
\end{aligned}$$

Esta conta pode ser visualizada da forma tradicional como

$$\begin{array}{cccc}
 & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 12} & {\scriptstyle 13}\\
1 & \cancel{3} & \cancel{3} & 3\\
- & 5 & 3 & 8\\
\hline
 & 7 & 9 & 5
\end{array}$$

Já nas contas em c), há várias possibilidades de “compensação”, por adição de um valor ao subtraendo e diminuição do mesmo valor (que não precisa ser múltiplo de 10, de 100, etc.) no minuendo. Por exemplo, podemos proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
1\,768 - 989 &= 1\,700 + 60 + 8 - 900 - 80 - 9\\
&= 1\,700 + 60 + 1 + 8 - 900 - 80 - 1 - 9\\
&= 1\,700 + 60 - 900 - 80 - 1\\
&= 1\,700 + 30 + 60 - 900 - 30 - 81\\
&= 1\,700 + 9 - 930\\
&= 700 + 1\,000 - 930 + 9 = 700 + 70 + 9 = 779.
\end{aligned}$$

Exercício 2.92 Qual dos números nas alternativas seguintes melhor aproxima a diferença $986\,733 - 885\,712$?

(a) 101 010
(b) 110 100

(c) 100 001
(d) 110 010
(e) 100 111

Nota ao(à) professor(a) 2.13 Neste exercício, veremos como melhorar as estimativas da soma por meio de arredondamentos cada vez mais **precisos** das parcelas. Essa mesma técnica será de suma importância no cálculo com a expansão decimal dos números racionais e dos números reais, a serem trabalhadas nos anos finais do Ensino Fundamental.

Solução. Começamos com uma aproximação menos precisa das parcelas: arredondamos 986 733 para 1 000 000 (por que?) e 885 712 para 900 000 (por que?), o que nos dá a estimativa de $1\,000\,000 - 900\,000 = 100\,000$ para a diferença. **Refinando** as aproximações, das parcelas, arredondamos, agora, 986 733 para 987 000 (por que?) e 885 712 para 886 000 (por que?), obtendo a estimativa de $987\,000 - 886\,000 = 101\,000$.

Portanto, a alternativa mais próxima dessa estimativa é a da letra b), pois 101 000 está mais próximo de 101 010 do que dos números nas outras alternativas. Observemos que o valor exato da diferença é 101 024. ■

Exercício 2.93 Arredonde as parcelas e estime cada uma das seguintes somas:

- 1 318 – 786
- 1 543 – 693
- 16 058 – 9 666
- 38 461- 28 367

Em seguida, calcule os resultados exatos e compare com as estimativas que você obteve.

Nota ao(à) professor(a) 2.14 Este exercício e o seguinte são de importância central no desenvolvimento das habilidades aritméticas dos alunos: estimar os resultados das operações por aproximações e arredondamentos é uma poderosa ferramentas de cálculo no dia a dia, especialmente em cálculo mental e em ter um senso aguçado do que é *razoável*, *sensato* e *esperado* para esses resultados. Logo, estamos tratando de desenvolver atributos fundamentais para a plena **cidadania**! Por fim, essas estimativas serão essenciais para facilitar cálculos envolvendo multiplicação e divisão adiante.

Solução.

- Arredondamos 1 318 para 1 320 (aumentamos 2) e 786 para 790 (aumentamos 4), obtendo a estimativa $1\,320 - 790 = 1\,200 + 100 + 20 - 700 - 90 = 1\,200 - 700 + 120 - 90 = 500 + 30 = 530$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $4 - 2 = 2$ a menos).
- Arredondamos 1 543 para 1 540 (diminuímos 3) e 693 para 700 (aumentamos 7), obtendo a estimativa $1\,540 - 700 = 800 + 40 = 840$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $3 + 7 = 10$ a menos).
- Arredondamos 16 058 para 16 060 e 9 666 para 9 700, obtendo a estimativa $16\,060 - 9\,700 = 15\,000 + 1\,000 + 60 - 9\,000 - 700 = 6\,000 + 300 + 60 = 6\,360$ para a soma (com um erro igual a 32 unidades a menos). Para melhorar essa estimativa, consideramos os arredondamentos de 9 670, ou seja, diminuímos 30 na primeira aproximação. Logo, a estimativa da diferença passa a ser $6\,360 + 30 = 6\,390$ (por que o sinal +?), com um erro de apenas 2 unidades em relação ao resultado exato.
- Arredondamos 38 461 para 38 500 e 28 367 para 28 400, obtendo a estimativa $38\,500 - 28\,400 = 10\,100$ para a soma (a diferença para o resultado exato seria igual a $39 - 33 = 6$ a mais. Por que?).

■

Exercício 2.94 Calcule o valor das seguintes expressões numéricas:

(a) $72 - (31 + 15)$
(b) $72 - 31 + 15$
(c) $72 - (31 - 15)$

Exercício 2.95 — Prova Brasil. A professora pediu para Adriana fazer a subtração: $679 - 38$. O resultado dessa operação será

a) 299.
b) 399.
c) 631.
d) 641.

Solução. Podemos usar o algoritmo da subtração: $679 - 38 = 600 + 70 + 9 - 30 - 8 = 600 + 70 - 30 + 9 - 8 = 600 + 40 + 1 = 641$, ou seja,

$$\begin{array}{r} 6\,7\,9 \\ -\quad 3\,8 \\ \hline 6\,4\,1 \end{array}$$

A resposta está na alternativa de letra d). ■

Exercício 2.96 Qual número deve ser colocado no quadradinho a seguir?

$$\boxed{94 - \square = 57}$$

a) 27 b) 37 c) 47 d) 153

Solução. Para resolver este probleminha precisamos, simplesmente, calcular a diferença

$$94 - 57 = 37.$$

Assim, concluímos que

$$94 = 57 + 37.$$

Portanto,

$$94 - 37 = 57,$$

ou seja, $\square = 37$. ■

Outra forma de resolver seria começar pelo probleminha mais simples de encontrar um número $\triangle$ tal que

$$94 - \triangle = 60.$$

Como $94 = 60 + 34$, teríamos que subtrair 34 de 90 para obtermos 60. Logo

$$\triangle = 34.$$

Para obtermos 57, devemos subtrair mais 3 unidades, pois $60 = 57 + 3$. Logo, teríamos que subtrair $34 + 3 = 37$. Portanto,

$$\square = 37.$$

Nota ao(à) professor(a) 2.15 Acabamos de resolver um problema que introduz o *pensamento algébrico*. No entanto, a solução dispensa usarmos a notação da Álgebra e modelar o problema em termos de incógnitas e equações, explicitamente. De fato, a solução requer um profundo, mas básico, entendimento do conceito de **subtração**: a diferença de dois números $m - n = \star$ naturais é a solução, por definição, da equação $m - \star = n$. Neste sentido, observamos que a segunda solução proposta, dada na caixa de texto, utiliza uma versão aritmética do chamado **método da falsa posição** para resolver equações lineares.

Exercício 2.97 A torcida do time Ases do Sertão tem 3 865 torcedores enquanto a torcida do Campeões da Serra tem 2 697 torcedores. Se, no próximo campeonato, cada torcida receber mais 340 torcedores, cada uma, qual será a diferença entre os números de torcedores?

(a) 2 697 (b) 1 848 (c) 1 508 (d) 1 168

Solução. Como o aumento do número de torcedores foi o mesmo para as duas torcidas, isto é, cada uma aumentou em 340 torcedores, a diferença do número de torcedores **não mudou**. A diferença é, portanto, igual a que havia antes, ou seja,

$$3\,865 - 2\,697 = 3\,865 + 3 - 2\,697 - 3 = 3\,868 - 2\,700 = 1\,168,$$

o que corresponde à alternativa d). ■

Exercício 2.98 Com a reabertura do estádio de futebol da cidade, formou-se uma fila para uma partida de futebol. Já entraram 697 pessoas e ainda há na fila 846 pessoas, com todos os protocolos de sanitários e de distanciamento. Quantas pessoas da fila não conseguirão assistir à partida, se o estádio pode receber apenas 1 100 pessoas?

(a) 254 (b) 443 (c) 1 543 (d) 1 946

Solução. Dos 1 100 lugares no estádio, restam apenas

$$1\,100 - 697 = 1\,100 - 700 + 3 = 403$$

lugares. Logo, das 846 pessoas na fila, ficarão sem lugar

$$846 - 403 = 443$$

pessoas, resposta que corresponde à alternativa b). ■

Exercício 2.99 — SPAECE - Adaptado. Eduardo saiu de casa para comprar roupas e levou consigo 5 notas de R$ 20,00. Ele gastou R$ 33,00 na compra de uma camisa e R$ 42,00 na compra de uma calça. Com quantos reais Eduardo ficou após fazer essas compras?

a) R$ 25,00 b) R$ 35,00 c) R$ 58,00 d) R$ 67,00

Solução. As 5 notas de 20 reais valem

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100 \text{ reais.}$$

Somando os gastos com as duas compras, temos

$$33 + 42 = 75 \text{ reais.}$$

O que resta dos 100 reais após os 75 reais de compras é

$$100 - 75 = 25 \text{ reais,}$$

resposta que corresponde à alternativa a). ■

Exercício 2.100 João tinha 215 bolinhas de gude. Em uma partida com Pedro, perdeu 37 bolinhas mas, em outra partida, ganhou 65 bolinhas. Com quantas bolinhas de gude João ficou?

a) 178. b) 243. c) 113. d) 187.

Solução. Após a primeira partida com Pedro, João ficou com $215 - 37 = 178$ bolinhas. Após a segunda partida, ele ficou com $178 + 65 = 243$ bolinhas de gude. A resposta está na alternativa de letra b). ■

Exercício 2.101 Felipe entrou numa loja de eletrônicos com R$ 5000,00 e comprou um *smartphone* e um relógio digital. Sabendo que esses itens custaram, respectivamente, R$ 3187,00 e R$ 839,00, quanto do dinheiro de Felipe sobrou?

(a) R$ 974,00
(b) R$ 1813,00
(c) R$ 1974,00
(d) R$ 2974,00
(e) R$ 4161,00

Solução. Efetuando a soma dos valores, em reais, dos itens que Felipe comprou, obtemos

$$\begin{array}{cccccc} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\ & & 3 & 1 & 8 & 7 \\ + & & & 8 & 3 & 9 \\ \hline & & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array}$$

Portanto, Felipe gastou R$ 4026,00 na compra. Visto que ele tinha R$ 5000,00, a subtração

$$5000 - 4026 = (1 + 4999) - (4025 + 1) = 4999 - 4025 = 974$$

nos dá o valor, em reais, do restante do dinheiro de Felipe. Assim, a alternativa (a) é a correta. ■

Exercício 2.102 — PROEB. Marcos e Alexandre foram assistir a um filme que tem duração 60 minutos. O filme começou às 12 horas e 45 minutos. Responda: a que horas esse filme vai terminar?

a) 13 horas e 15 minutos
b) 13 horas e 45 minutos
c) 14 horas e 15 minutos
d) 14 horas e 45 minutos

Solução. Como 60 minutos corresponde a 1 hora, o filme irá terminar às 12+1=13 horas e 45 minutos. A repsosta está na letra b). ■

Exercício 2.103 Semana passada consegui ler um livro do início da página 185 até o final da página 437. Que número de páginas desse livro consegui ler naquela semana?

(a) 623 (b) 438 (c) 348 (d) 338 (e) 253

Exercício 2.104 Antenor nasceu em fevereiro de 1972. Escolha a alternativa que corresponde a quantos anos ele completou no ano de 2021.

(a) 49 anos (b) 51 anos (c) 59 anos (d) 93 anos

Solução. Basta calcularmos a diferença

$$2021 - 1972 = 2021 - 1971 - 1 = 50 - 1 = 49 \text{ anos},$$

resposta que corresponde à alternativa a). ■

Nota ao(à) professor(a) 2.16 É pedagogicamente relevante observar as respostas dos alunos quanto a possíveis erros conceituais ou técnicos. Por exemplo, as respostas que marcam a alternativa b) podem ser motivadas pelo fato de alguns alunos calcularem a diferença entre os algarismos finais que expressam os anos, isto é, $72 - 21 = 51$. Pode ser também induzida por uma conta tecnicamente falha como em

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 9 & \scriptstyle 12 & \\
 & \cancel{2} & \cancel{0} & 2 & 1 \\
- & 1 & 9 & 7 & 2 \\
\hline
 & & & 5 & 1
\end{array}
$$

A alternativa c) pode ser marcada por conta de erros na contagem manual do intervalo de tempo, década e década, por exemplo. Quanto à escolha da alternativa d), o aluno pode ter considerado que deveria somar $72 + 21$, obtendo 93 anos.

Nota ao(à) professor(a) 2.17 Procure analisar as respostas de seus alunos: não apenas as alternativas marcadas, mas os raciocínios, representações, modelos e cálculos que levaram à resposta. Analise as fontes de possíveis erros, reconheça o uso de estratégias eventualmente diferentes das usuais e registres os progressos e pontos consolidados no aprendizado dos conceitos e técnicas. O ideal é que você possa expor **relatórios** para os alunos sobre o desempenho deles e delas nas atividades. O *feedback* é uma das estratégias pedagógicas de maior efeito sobre a aprendizagem, como vem sendo demonstrado na literatura internacional séria e fundamentada!

Vários exercícios nesse caderno foram escritos para propiciar a você esta análise e a construção de protocolos de **observação** e *feedback* sobre o trabalho dos alunos com essas tarefas.

Exercício 2.105 Pelo Censo de 2010, a população de Tianguá era de 68 892 habitantes. A estimativa de população do município em 2021 é de 77 111 habitantes. Com base nestes dados, qual foi o aumento de habitantes da cidade no período?

Solução. Basta calcularmos a diferença:

$$
\begin{aligned}
77\,111 - 68\,892 &= 76\,000 + 1\,000 + 111 - 68\,000 - 892 \\
&= 76\,000 - 68\,000 + 111 + 1\,000 - 892 \\
&= 8\,000 + 111 + 1\,000 - 900 + 8 = 8\,000 + 111 + 108 \\
&= 8\,000 + 219 = 8\,219 \text{ habitantes a mais.}
\end{aligned}
$$

■

Exercício 2.106 Carolina pagou R\$ 214,00 de sua conta na mercearia e R\$ 136,00 no açougue, ficando com um restante de R\$ 750,00 do seu salário mensal. De quanto é seu salário mensal?

a) R\$ 350,00 b) R\$ 614,00 c) R\$ 886,00 d) R\$ 1 100,00

Exercício 2.107 Um automóvel passou pelo quilômetro 585 de uma rodovia. Ele deve chegar a seu destino no quilômetro 883.

Figura 2.7: Image by Rudy and Peter Skitterians from Pixabay

Quantos quilômetros de estrada ainda deve percorrer para chegar a seu destino?

Exercício 2.108 Uma montadora de automóveis produziu, até este momento, 9 905 automóveis. Quantos automóveis **a mais** terá que produzir para completar a meta de 20 017 automóveis este ano?

Solução. Devemos calcularmos a diferença entre o que *deve* ser produzido e o que *já* foi produzido, isto é,

$$\begin{aligned} 20\,017 - 9\,905 &= 19\,900 + 100 + 17 - 9\,900 - 5 = 10\,000 + 100 + 17 - 5 \\ &= 10\,000 + 100 + 12 = 10\,112 \text{ automóveis a mais.} \end{aligned}$$

■

Exercício 2.109 Em um mesmo período, a Fazenda Vaquinha Feliz produziu 75 864 litros de leite enquanto a Fazenda Pasto Livre produzir 84 551 litros de leite. Quantos litros de leite **a mais** a Fazenda Pasto Livre produziu?

Exercício 2.110 Em uma biblioteca com 5 984 livros, 927 são sobre Literatura. Quantos livros não são sobre Literatura?

Exercício 2.111 Em um jogo de futebol americano, os “Caçadores” venceram os “Gladiadores” por uma diferença de 59 pontos. Se os “Caçadores” fizeram 163 pontos, quantos pontos fizeram os “Gladiadores”?

(a) 59 pontos
(b) 63 pontos
(c) 80 pontos
(d) 104 pontos
(e) 222 pontos

Exercício 2.112 Otávio comprou 456 doces para seu casamento. Desses doces, os convidados consumiram 367, os noivos guardaram 72 e o restante foi distribuído entre os garçons.

Figura 2.8: Photo by Viktor Forgacs on Unsplash

Quantos doces foram distribuídos entre os garçons?

(a) 27 (b) 18 (c) 17 (d) 15 (e) 14

Exercício 2.113 A conta de Vivian tinha um saldo positivo igual a R$ 850,00 e não poderia ficar negativa. Vivian teve de pagar R$ 142,00 da conta de água, R$ 198,00 da conta de luz, R$ 48,00 da conta do celular, R$ 100,00 das compras de mercado e R$ 35,00 de transporte. Qual o novo saldo da conta de Vivian?

(a) R$ 525,00
(b) R$ 469,00
(c) R$ 427,00
(d) R$ 375,00
(e) R$ 327,00

Exercício 2.114 Para pagar uma conta, Débora apresentou ao caixa uma nota de R$ 50,00. Contudo, ele lhe disse que o dinheiro não era suficiente, e então Débora lhe deu outra nota de R$ 50,00. O caixa devolveu-lhe um troco de R$ 27,00, mas Débora percebeu que ainda faltavam R$ 9,00 de troco. Qual foi o valor da compra que Débora efetuou?

Exercício 2.115 Em abril de 2020, o açude de Orós tinha atingido 450 milhões e 834 mil metros cúbicos de água depois de ter recebido 19 milhões e 484 mil metros cúbicos de recarga devido às chuvas naquele período.

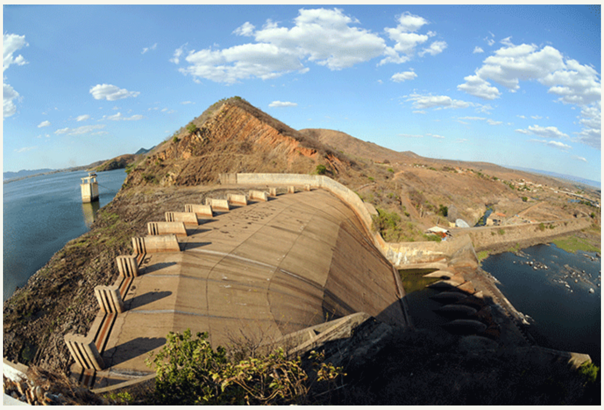


Figura 2.9: Açude de Orós. Fotografia de Zig Koch - Banco de Imagens da ANA

Qual era a capacidade do açude antes dessa recarga?

Exercício 2.116 Uma empresa deve pagar 96 651 reais de salários e impostos. Os impostos, apenas, custam 8 623 reais. Sendo assim, quanto a empresa deve pagar de salários?

Exercício 2.117 Manoel retirou 48 reais de sua conta bancária, ficando com um saldo de 1 478 reais. Quanto dinheiro Manoel tinha na conta antes da retirada

Exercício 2.118 Uma estação de tratamento de água tem dois grandes tanques decantadores, cuja capacidade total é de 38 860 metros cúbicos. Se um dos tanques cabe 15 980 metros cúbicos, qual a capacidade do outro?

Exercício 2.119 Uma cidade é abastecida por dois reservatórios de água. Em um certo período, a capacidade de um deles passou de 27 350 000 de metros cúbicos para 30 120 000 de metros cúbicos de água, enquanto a capacidade do outro passou de 127 080 000 metros cúbicos para para 124 510 000 metros cúbicos de água. A capacidade total aumentou ou diminuiu? Em quantos litros?

Solução. Há várias maneiras de resolver o problema: uma possibilidade é calcular, em separado, quanto variou a capacidade de cada reservatório. Outra possibilidade é comparar a capacidade total, antes e depois. Prove que ambas as estratégias dão o resultado e que são equivalentes!

Vejamos a primeira possibilidade: a **variação da capacidade** do primeiro reservatório é dada por

$$30\,120\,000 - 27\,350\,000 = 2\,770\,000$$

metros cúbicos **a mais**, enquanto que **variação da capacidade** do segundo reservatório é dada por

$$127\,080\,000 - 124\,510\,000 = 2\,770\,000 = 2\,570\,000$$

metros cúbicos **a menos**. Note que o primeiro reservatório ganha água enquanto o segundo perde água no período. Logo, a **variação da capacidade total** é dada por

$$2\,770\,000 - 2\,570\,000 = 200\,000 \text{ metros cúbicos.}$$

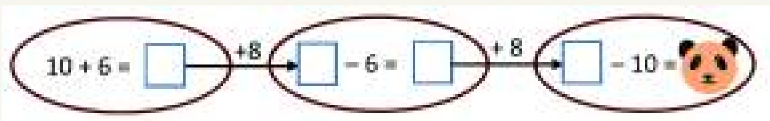
Logo, a capacidade total aumentou no período analisado. ■

Exercício 2.120 O **gráfico de barras** mostra o número total de medalhas obtido pelo Brasil nas cinco últimas Olimpíadas.

Com base no gráfico, responda:

- Qual o maior número de medalhas?
- Qual a diferença entre o maior e menor número de medalhas?
- Qual o total de medalhas obtidas pelo Brasil nessas cinco Olimpíadas?
- Quantas medalhas a mais foram obtidas em Tóquio do que em Pequim?

Exercício 2.121 — Canguru - 2017. Qual o número está escondido pela figura do urso panda?



Solução. Temos a seguinte sequência de operações:

$$10 + 6 = \boxed{16} \xrightarrow{+8} 24,$$

$$24 - 6 = \boxed{18} \xrightarrow{+8} 26,$$

Finalmente, o valor do panda é $26 - 10 = 16$.

■

Exercício 2.122 — Caunguru. A soma das idades de Cátia e sua mãe é 36 e a soma das idades de sua mãe e sua avó é 81. Quando Cátia nasceu, sua avó tinha quantos anos?

(a) 28 (b) 38 (c) 45 (d) 53 (e) 56

Exercício 2.123 — Mini Olimpíadas Portuguesas de Matemática - adaptado. Quando Júlia tinha 7 anos, seu pai tinha 33 anos de idade. Se hoje ela tem 11 anos, qual a soma da sua idade com a de seu pai?

Solução. Se a idade de Júlia aumentou $11-7=4$ anos, então a idade do seu pai também aumentou 4 anos e hoje ele tem $33+4=37$ anos. Então, a soma das idades é $11+33=44$. ■

Exercício 2.124 Ontem, no dia do seu aniversário, o pai do Tico recebeu como prenda uma mala de viagem. Para não se esquecer do código da sua mala, ele escolheu o ano em que nasceu. Descubra o código da mala sabendo que:

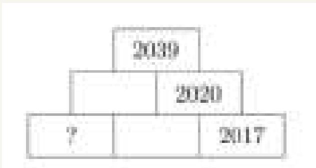
- O pai do Tico tem mais de 20 anos e nasceu depois de 1974.
- A soma dos algarismos das unidades e das dezenas do ano em que nasceu é menor do que 10.
- A idade do pai do Tico é um número par.

Solução. Como $2017-20=1997$, o pai dele nasceu entre 1974 e 1997. Neste intervalo, os anos que satisfazem a segunda condição são:

$$1980, 1981 \text{ e } 1990$$

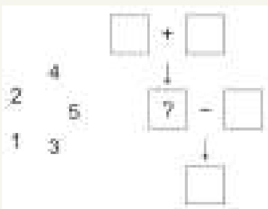
As idades possíveis são $2017-1980=37$, $2017-1981=36$ e $2017-1990=27$. Levando em conta a terceira condição, podemos concluir que ele nasceu em 1981. ■

Exercício 2.125 — Canguru 2017. No diagrama, cada número é a soma dos dois números debaixo dele. Qual é o número que deve ser escrito na casa com o ponto de interrogação?



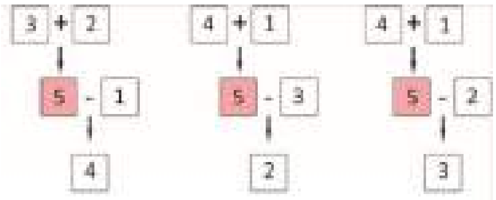
Solução. Na casa vazia da camada do meio o número a ser escrito é $2039-2020=19$. Na camada de baixo, o número da casa central é $2020-2017=3$. Portanto, na casa com o ponto de interrogação, deve ser escrito o número $19-3=16$. ■

Exercício 2.126 — Canguru - 2015 (adaptado). Escreva os números 1, 2, 3, 4 e 5, um em cada um dos cinco quadradinhos na figura abaixo, de maneira que as contas indicadas estejam corretas. Qual é o número que deve ser escrito no quadradinho com o sinal de interrogação?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Solução. O maior número da figura é o que foi obtido após a operação de soma e, portanto, ele deve valer 5, que é o maior dos números fornecidos. Perceba que, se a interrogação vale 5, é possível preencher o diagrama de várias formas distintas:



A resposta está na letra e). ■

2.9 – Como somar e subtrair sem caneta e papel

O que passamos a discutir, agora, são algumas estratégias e exemplos de *cálculo mental*, isto é, técnicas para realizar adições e subtrações com muito mais rapidez do que fazendo as contas à mão. Mas, você pode perguntar, por que fazer isso, se dispomos de calculadoras? Ora, o exercício de manipular números mentalmente facilita a aprendizagem das relações entre eles e, assim, da Matemática como um todo; também serve para desenvolver em você uma *intuição sobre ordens de grandeza* indispensável à vida no mundo moderno. A ideia é que você fortaleça seu *senso numérico*!

O grande segredo do cálculo mental das adições e subtrações está em *inverter a ordem* das operações: ao invés de somar ou subtrair da direita para a esquerda usando os dispositivos de adição ou subtração, para fazer cálculos mentais é mais eficiente *somar ou subtrair a partir da esquerda*, levando em conta as potências de 10 que multiplicam os algarismos. O estudante precisará ter um bom entendimento do método, em vez de apenas memorizar como funciona o dispositivo.

Por exemplo, para somar 63 com 32, começamos escrevendo 32 como $30 + 2$; em seguida, calculamos (mentalmente, não esqueça!) $63 + 30 = 93$ e, depois, juntamos o 2 que separamos, obtendo $93 + 2 = 95$. Em resumo, fazemos mentalmente o seguinte:

$$63 + 32 = 63 + (30 + 2) = (63 + 30) + 2 = 93 + 2 = 95.$$

Note que usamos a propriedade de *associatividade* nessas contas, quando efetuamos $63 + 30$ primeiro ao invés de $30 + 2$.

Para outro exemplo, podemos somar mentalmente 87 com 52 primeiro escrevendo $87 = 80 + 7$ e $52 = 50 + 2$, depois calculamos $80 + 50 = 130$ e $7 + 2 = 9$ e, por fim, fazemos $130 + 9 = 139$. Em resumo:

$$87 + 52 = (80 + 7) + (50 + 2) = (80 + 50) + (7 + 2) = 130 + 9 = 139.$$

Mais um exemplo: quanto é $37 + 95$? Nesse caso, podemos começar fazendo $37 + 90 = 127$ (o 7 não muda, graças ao 0 em 90; por isso, podemos deixá-lo em seu lugar e simplesmente somar $3 + 9 = 12$); em seguida, somamos o 5 que foi separado, obtendo $127 + 5 = 132$. Novamente resumindo:

$$37 + 95 = 37 + (90 + 5) = (37 + 90) + 5 = 127 + 5 = 132.$$

A adição sem caneta e papel de números com três ou mais algarismos é feita pelo mesmo método. Por exemplo, podemos calcular a soma $628 + 337$ em três etapas: primeiro, escrevemos (mentalmente!) $337 = 300 + 30 + 7$; em seguida, somamos sucessivamente $628 + 300 = 928$, $928 + 30 = 958$, $958 + 7 = 965$. Na sua mente, essa solução deve *soar* assim:

$$628 \textit{ mais } 300 \textit{ é } 928, \textit{ mais } 30 \textit{ é } 958, \textit{ mais } 7 \textit{ é } 965.$$

Analogamente, somamos 206 com 528 “dizendo” mentalmente:

$$206 \textit{ mais } 500 \textit{ é } 706, \textit{ mais } 20 \textit{ é } 726, \textit{ mais } 8 \textit{ é } 734.$$

Quanto a subtrações, calculamos $58 - 35$ efetuando sucessivamente as subtrações $58 - 30 = 28$ e $28 - 5 = 23$. No final das contas, o que estamos fazendo é

$$58 - 35 = 58 - (30 + 5) = (58 - 30) - 5 = 28 - 5 = 23.$$

Para outro exemplo, calculamos $236 - 157$ em três etapas: $236 - 100 = 136$, $136 - 50 = 86$ e $86 - 7 = 79$.

Às vezes, também podemos usar subtrações para ajudar no cálculo mental de adições. Por exemplo, para efetuar $436 + 728$, podemos "escrever"

$$\begin{aligned} 486 + 758 &= (500 - 14) + (760 - 2) = (500 + 760) - (14 + 2) \\ &= 1260 - 16 = 1260 - 10 - 6 \\ &= 1250 - 6 = 1244. \end{aligned}$$

Exercício 2.127 Efetue mentalmente as adições e subtrações indicadas usando as técnicas apresentadas nos exemplos acima:

(a) $43 + 26$.	(b) $72 + 27$.	(c) $54 + 65$.	(d) $87 + 35$.
(e) $53 + 78$.	(f) $39 + 85$.	(g) $88 + 28$.	(h) $91 - 15$.
(i) $17 + 61$.	(j) $42 + 78$.	(k) $93 - 25$.	(l) $58 + 67$.
(m) $45 + 67$.	(n) $29 + 56$.	(o) $91 - 64$.	(p) $88 + 99$.

2.10 – Exercícios adicionais

Exercício 2.128 Em uma cesta, há 35 laranjas e, em outra, há 17 laranjas.

Quantas laranjas devem ser passadas de uma cesta à outra para que as duas fiquem com a mesma quantidade de laranjas?

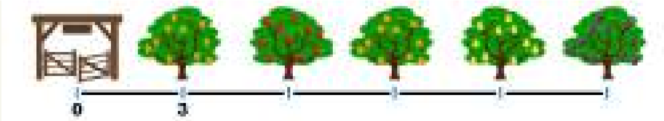
Solução. A quantidade total de laranjas é $35 + 17 = 52$. Como $52 = 50 + 2 = 25 + 25 + 1 + 1$, segue que cada cesta deve ficar com $25 + 1 = 26$. Assim, devem ser retiradas $35 - 26 = 9$ laranjas da cesta que tem mais para a que tem menos. ■

Photo by Chris Arthur-Collins on Unsplash

Exercício 2.129 Em um jogo, a pontuação é contada de acordo com o número de fichas que cada jogador obtém. Fichas pentagonais valem 1000 pontos, fichas quadradas valem 100 pontos, fichas redondas valem 10 pontos e fichas triangulares valem 1 ponto. Nas opções a seguir, as fichas ao lado do nome de cada jogador são aquelas que ele ganhou. Quem ganhou o jogo e quantos pontos fez cada jogador?

(a) José: ⬟▲▲▲▲.
(b) Joaquim: ■■■■■■■■▲▲▲▲▲▲▲.
(c) Joel: ■■■■●▲▲▲▲▲.
(d) João: ⬟■■●▲.
(e) Jeremias: ■■■■■■■■▲.

Exercício 2.130 — SAERS. Jeremias plantou uma fileira de cinco árvores frutíferas, distanciadas três metros uma da outra. Veja, abaixo, a representação dessas árvores. Sabendo que a primeira árvore também se situa a três metros da porteira, pergunta-se: qual é a distância entre a quinta árvore e a porteira?



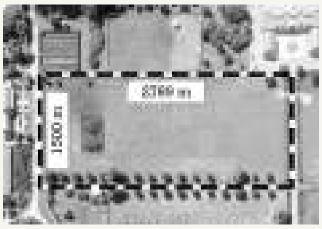
(a) 15. (b) 12. (c) 9. (d) 6.

Exercício 2.131 Certo asteroide é visível da Terra a olho nu a cada 67 anos, tendo sido visto pela última vez no ano de 1954. Qual é o primeiro ano de nosso século em que ele tornará a ser visto a olho nu de nosso planeta?

(a) 1987
(b) 2008
(c) 2021
(d) 2045
(e) 2088

Exercício 2.132 Um fazendeiro mediu sua terra, de formato retangular, para cercá-la inteiramente com uma cerca de madeira. Quantos metros de cerca ele deverá fazer, se sua fazenda possui 1 500 metros de largura por 2 789 metros de comprimento?

(a) 3 000 metros
(b) 4 289 metros
(c) 8000 metros
(d) 8578 metros
(e) 9 000 metros



Exercício 2.133 Um marido é 10 anos mais velho que sua esposa. Esta, por sua vez, tinha 22 anos quando o filho deles nasceu. O filho do casal tinha 8 anos quando sua irmã nasceu. Esta última fez 6 anos ontem. Qual é a idade do marido?

(a) 42 anos. (b) 44 anos. (c) 46 anos. (d) 48 anos.

Exercício 2.134 O sucessor do sucessor de um número é 35. Que número é esse?

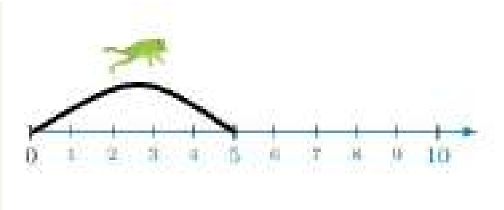
a) 31 b) 33 c) 34 d) 37

Solução. Como o antecessor de 35 é 34 e o antecessor de 34 é 33, o número procurado é 33. A resposta está na letra b). ■

Exercício 2.135 — Canguru - 2014. Qual a diferença entre o menor número de 5 algarismos e o maior número de 4 algarismos?

Solução. O sucessor do maior número de 4 algarismos é o primeiro número de 5 algarismos. Portanto, a diferença entre eles é 1. ■

Exercício 2.136 Um sapo pula apenas sobre os números naturais da reta numérica. Quando se movimenta para a esquerda, ele sempre pula 3 unidades e, quando se movimenta para a direita, 5 unidades.



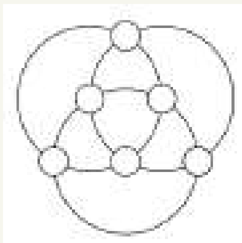
a) Explique como o sapo pode fazer para andar exatamente 7 unidades para a direita a partir de qualquer ponto da reta.
b) Explique como o sapo pode fazer para andar exatamente 2 unidades para a direita a partir de qualquer ponto da reta.

Solução. (a) Basta o sapo dar 2 pulos para a direita, se deslocando 10 unidades, e depois voltar para a esquerda com 1 pulo, totalizando um deslocamento de 3 unidades. No final, ele terá se deslocado para a direita a quantidade de $10 - 3 = 7$ unidades.

(b) Basta o sapo dar 4 pulos para a direita, se deslocando 20 unidades, e depois voltar para a esquerda com 6 pulos, totalizando um deslocamento de 18 unidades. No final, ele terá se deslocado para a direita a quantidade de $20 - 18 = 2$ unidades.

■

Exercício 2.137 Na figura abaixo, três circunferências de mesmo tamanho se intersectam em seis pontos. Em cada um destes pontos, existe um círculo menor, todos de mesmo tamanho. Queremos colocar os números 1, 2, 3, 4, 5, 6 nos círculos pequenos, de modo que os números escritos em cada uma das circunferências maiores seja 14.

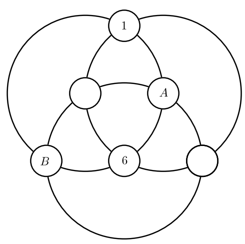


a) Qual a soma de todos os números?
b) Fixada uma circunferência qualquer, qual a soma do dois números que não estão nela?
c) Dê um exemplo de distribuição dos números.

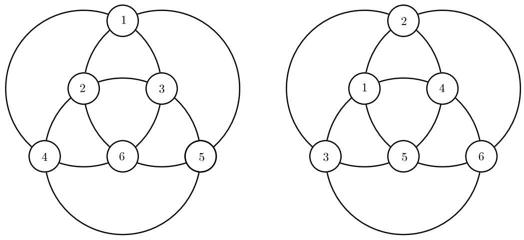
Solução. a) A soma de todos os números dados é $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

b) Como a soma dos quatro números escritos em cada circunferência maior é 14, a soma dos outros dois números é $21 - 14 = 7$. Os possíveis pares de números com tal soma são: (3,4), (2,5) e (1,6).

c) Fixando um desses pares de soma 7, como exemplificado na figura a seguir com o par (1,6) e considerando um dos círculos grandes que passam por eles, podemos concluir que os outros dois números, indicados por A e B neste mesmo círculo, devem somar $14 - 7 = 7$.



Portanto, basta escolhermos um dos pares restantes para as posições A e B e, finalmente, o par que sobrou para outras duas posições. A figura a seguir indica dois possíveis preenchimentos:



Exercício 2.138 Complete o tabuleiro a seguir com os números que estão faltando.

13	+	15	=	28
+	X	+	X	+
?	+	17	=	31
=	X	=	X	=
27	+	?	=	?

Exercício 2.139 — OBMEP (adaptada). Numa adição de 7 parcelas foram adicionadas 3 unidades a cada uma das parcelas. Na nova operação, o que ocorre com a soma original das parcelas?

(a) Não se altera.
(b) É acrescida de 3 unidades.
(c) É acrescida de 7 unidades.
(d) É acrescida de 21 unidades.
(e) É acrescida de 3 parcelas.

Exercício 2.140 Fernanda e seu pai, em certo momento, tinham idades com algarismos invertidos: Fernanda tinha 14 anos, enquanto seu pai tinha 41 anos. Supondo que isso aconteceu em 1998, em que ano essa coincidência voltou a acontecer?

Exercício 2.141 No Dia dos Pais, numa promoção, uma camisa e uma calça custavam, juntas, R$ 190,00. Sabendo que a camisa custava R$ 30,00 a mais que a calça, qual era o preço da camisa?

(a) R$ 190,00 (b) R$ 110,00 (c) R$ 80,00 (d) R$ 30,00

Exercício 2.142 O visor das calculadoras comuns possui espaço máximo para oito algarismos. Se digitarmos nela o maior número possível e, em seguida, subtrairmos dele o maior número par possível, a que resultado chegaremos?

(a) 0. (b) 1. (c) 2. (d) 3. (e) 4.

Exercício 2.143 O Táler (plural táleres) é a moeda oficial de um país distante. Nesse país, existem notas de 1, 2, 3, 4 e 5 táleres. De quantas maneiras se pode pagar uma conta de 25 táleres usando exatamente 6 cédulas?

(a) 5.
(b) 6.
(c) 7.
(d) 8.
(e) 9.

CIENTISTA CHEFE
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

3 Orientações metodológicas

Na apresentação do material e ao longo do texto, apontamos várias sugestões de caráter metodológico para a implementação de roteiros curriculares e rotinas pedagógicas de uso do material, com ênfase na recuperação e fortalecimento das aprendizagens e, não menos importante, no gradual desenvolvimento de competências complexas, além das competências e habilidades da BNCC e DCRC direta ou indiretamente relacionadas aos temas deste caderno.

Nesta seção, apresentamos, ainda que superficialmente, alguma sugestões relacionada ao conceito e práticas do **ensino explícito**, conforme sistematizados pelo Professor Clermont Gauthier e seus colaboradores. Esta metodologia tem forte base empírica, não sendo apenas algo normativo e, sim, fundamentado em evidências da Psicologia Cognitiva e, ainda mais relevante, em avaliações de impacto realizadas com o necessário rigor analítico.

O desenho metodológico do ensino explícito é baseado na tríade

preparação-interação-consolidação,

referida pelo acrônimo PIC. Nesta nossa discussão inicial, enfatizamos alguns dos elementos da etapa P, a de preparação, uma vez que está fortemente associada ao contexto de recuperação de aprendizagens em que esses materiais são trabalhados, segundo o planejamento pedagógico no âmbito do Mais PAIC e do Pacto pela Aprendizagem. Esses elementos seriam

- definir os **objetivos de aprendizado**: em nosso caso, os saberes e habilidades da Matriz dos Saberes podem ser tomados como um conjunto inicial de metas de aprendizagem, aula a aula, semana a semana, quinzena a quinzena. Obviamente, esses objetivos estão vinculados às competências e habilidades da BNCC e DCRC e *concorrem* para o desenvolvimento das habilidades expressas nos descritores das avaliações como SAEB e SPAECE. As atividades didáticas devem ser estruturadas em torno desses objetivos, que devam ser **explícitos**, tanto para você mesmo. quanto para seus alunos. Além de explícitos, devem ser enunciados de modo que possa ser observado se foram atingidos ou não. Metas que sejam descritas de modo muito genérico e aberto serão dificilmente mensuráveis ou mesmo observáveis. Os objetivos não se resumem aos conteúdos que serão abordados, mas *também* ao que se espera dos alunos, a quais habilidades serão desenvolvidas, como os conhecimentos serão mobilizados em atividades e que resultados serão avaliados. Por exemplo, quando declaramos o objetivo de aprendizado formulado como o saber

  S02.H5: utilizar, de modo correto e justificado, procedimentos e algoritmos de adição de números naturais

  estamos, explicitando o objetivo de que os procedimentos de adição de números naturais sejam trabalhados pelos alunos e, com isto, eles e elas possam, como *resultado* da rotina pedagógica, utilizar, corretamente e com justificativas válidas, esses procedimentos, quer em aplicações diretas, quer em contextos que demandem alguma modelagem.
- Delimitar as **ideias mestras** e determinar os **conhecimentos prévios**: fixados os objetivos, é preciso identificar de que conhecimentos, habilidades, conceitos, técnicas, representações, em suma, que **repertório** é necessário, do ponto de vista lógico e cognitivo, como base para o trabalho com os objetivos fixados. Além disso, é igualmente relevante entender como os objetivos planejados vão sedimentar o que será estudado em seguida, imediatamente ou nos anos futuros. Para tanto, o(a) professor(a) deve ter, muito claramente, mapeamentos das ideias fundamentais que vão sendo estruturadas no eixo que passa pelos objetivos definidos. Em nosso caso, as grandes ideias da Aritmética, já mencionadas na apresentação. Além disso, é essencial que, por meio dos exercícios iniciais em cada aula, seja feita uma sondagem minuciosa do grau com que os alunos detêm os conhecimentos prévios fundamentais.

Nos próximos cadernos, desenvolveremos estes e outros pontos mais detalhadamente.

CIENTISTA CHEFE
MAISPAIC
PACTO PELA APRENDIZAGEM

4 Referências

- Alguns portais e plataformas
  - Portal da Matemática: https://portaldaobmep.impa.br
  - Khan Academy: https://www.khanacademy.org/math/cc-fourth-grade-math
  - Roda de Matemática: https://www.rodadematematica.com.br/
  - OBMEP: http://www.obmep.org.br/provas.htm
  - Canguru: https://www.cangurudematematicabrasil.com.br
- Alguns canais e vídeos
  - Isto é Matemática: https://www.youtube.com/c/istoematematica
  - OBMEP: https://www.youtube.com/user/OBMEPOficial
  - Matemaníaca: https://www.youtube.com/channel/UCz4Zuqtj9fokXH68gZJmCdA
  - Números na BBC Brasil: https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k
  - Marcus Du Sautoy, The Code, BBC.
- Referências para desenvolvimento profissional

  - Boaler, Jo. Mentalidades matemáticas. Porto Alegre, Penso, 2018.
  - Gauthier, Clermont et al. Ensino explícito e desempenho dos alunos: a gestão dos aprendizados. Petropólis, RJ: Vozes, 2014.
  - Dehaene, Stanislas. The number sense: how the mind creates mathematics - revised and updated edition. Oxford: Oxford University Press, 2011.
  - Oakley, Barbara et. al. A mind for numbers: how to excel at math and science. New York: TarcherPerigee, 2014.
  - Oakley, Barbara et al. Uncommon sense teaching. New York: TarcherPerigee, 2021.

- Referências sobre a temática do caderno

  - Bellos, Alex. Alex no pais dos números. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.
  - Dorichenko, S. Um círculo matemático de Moscou. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.
  - Holanda, Bruno; Chagas, Emiliano. Círculos de Matemática da OBMEP, volume 1: primeiros passos em combinatória, aritmética e álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
  - Wu, Hung-Hsi. Compreender os Números na Matemática Escolar. Porto: Porto Editora & Sociedade Portuguesa de Matemática
  - Murcia, Joseángel. Y me llevo una. Zaragoza: Nordica Libros, 2019.
  - Stillwell, John. Elements of Mathematics. Princeton: Princeton University Press, 2016.

CEARÁ
GOVERNO DO ESTADO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

CIENTISTA CHEFE
EDUCAÇÃO

PACTO PELA APRENDIZAGEM

MAISPAIC